場の量子論

—摂動計算の基礎—

（改訂版）

日置善郎著

吉岡書店

はじめに

場の量子論は，微視的な世界を記述する強力かつ精密な理論体系として，素粒子物理学や物性物理学において，非常に広い守備範囲を持っている．従って，現代の物理学を目指す学部および大学院の学生は，この理論をしっかりと学ぶことが要求される．特に，高エネルギー現象を扱う現代の素粒子物理においては，特殊相対論の効果も取り入れた相対論的場の量子論の理解が不可欠である．本書は，この相対論的場の量子論についての，筆者自身の講義ノートを基にまとめられている．目的は，この理論の基本的な構成をスケッチするとともに，そこにおける主要な計算方法である共変的な摂動論の基礎を与え，更に，具体的に幾つかの量の第１次近似での計算を示すことである．場の量子論は非常に豊富な内容を含むが，ここではそれらを広く記述することは初めから狙わず，上記の点に焦点を絞る．このため，通常の場の理論の教科書なら必ず含んでいる事項でも，上記の目的に直接には関わらないものは全て省略している．

本書の読者としては，場の量子論に興味を持ちその定量的な理解を目指すすべての方々を想定しているが，特に意識したのは，量子力学と特殊相対論の基本的な学習を終え現在まさに場の量子論の本格的教科書に取り組み始めている，或いは，一応はそれを読み終えたあたりの学部または修士課程レベルの学生諸君である．もっとも，そのような教科書を完全にマスターした学生は，本書を読む必要はないだろう．筆者の念頭にあったのは，そういう教科書相手に苦戦している学生である．つまり，教科書の部分部分については何とか理解しているが，全体のイメージが今一つ掴めない，或いは，具体的な摂動計算がまだうまく出来ない，といった諸君である．実を言うと，筆者自身がまさにこのような学生だった．場の理論を理解するといっても，その意味するものは人に依って，またレベルに依って当然異なるだろうが，まずは具体的な摂動計算が出来るようになることと答えても特に反論はされないだろう．そして，これは，修

士課程時代の筆者の目標の一つでもあった．

幸運なことに，筆者の場合は当時 京大・基礎物理学研究所におられた牟田泰三先生（現 広島大学・理学部・教授）の大変に明解な講義で学ぶことが出来，何とか計算も出来るようになった．いつの間にか筆者も院生相手に講義をする立場になったが，その準備に当っては常にその牟田先生の講義を意識し，同時に，かつての自分を思い出してノートを作ってきたつもりである．1998 年秋に京都大学・総合人間学部のセミナーに招いて頂いた際に，その講義ノートの一部を使用したところ，同学部・教授の青山秀明氏から全体を本にしてはどうかとのお勧めを受けた．出版など頭になかっただけに躊躇もしたが，一方，自分のノートが本当に役に立つものかどうか試してみたいという誘惑にも抗し難く，このような形でまとめさせて頂くこととした．少し大袈裟な言い方だが，この本により「摂動の第 1 次近似の計算が自分の手でやれた」という満足感を読者が味わってくれることを願っている．

本書の構成について説明しよう．全体は I 部，II 部，III 部および付録から成っている．第 I 部では，場の理論はどのような体系か，また何故有用なのかについてのイメージ作りのために，古典力学のラグランジュ形式（解析力学）から出発し，場の量子論に至るまでの過程をまとめた．そこでは明快さ・簡潔さを考え，扱う場は最も簡単な構造を持つ実スカラー場に限定した．第 II 部では，摂動論に必要な基礎事項，特に S 行列演算子，を解説し，実際の種々の素粒子を記述する各種の場の基本的な性質をまとめた．この「場の演算子のまとめ（II.6）」の前まで（および III.1.1）なら，場の理論を全く勉強したことのない学生にとっても「場の理論入門コース」として役に立つのではないかと思う．第 III 部が具体的な計算の展開である．まずは，S 行列要素を如何に評価しそこから不変散乱振幅を導くかを示し，それに基いてファインマン則・ファインマン図の手法を説明する．次に，幾つかの実際の反応にそこまでの知識を応用し，散乱断面積や崩壊幅を計算してみる．ここでは，単に式変形を目で追

うだけでなく，実際にペンを持って確かめながら進んで欲しい．付録1では共変・反変ベクトルの概念についてまとめた．時間座標に虚数単位 i を用いる形式で相対論を勉強してきた読者の参考になればと思う．付録2には一般の場合のウィックの定理の証明を与えた．但し，実際の計算で必要となるのはもっと簡単な式だけなので，その証明が全て理解できなくとも気にせず本文を読み進めてもらえばよいだろう．付録3は γ 行列やスピノルについての公式のまとめである．ここは第 III 部での計算と密接な関係があるので必要に応じて参照して欲しい．付録4・5では場の演算子の対称性・変換性についてまとめた．いずれも本文の理解に不可欠というものではなく，特に付録5の内容はややレベルが高いため読みづらいかも知れない．しかし，実際に素粒子反応の摂動計算が行われている論文においては，対称性が散乱振幅の形を決める上で重要な役割を果たすことも多いので，その際の参考になればと思い加えることにした．この付録も含め所々に練習問題を置いたが，いずれもそこまでの説明の確認のような内容なので解答は省略した．実は，いろいろな公式は筆者自身の計算のために集めたものでもあり，その意味で，本書は，研究現場にいる方々にも「場の量子論・摂動計算のための公式集」的に活用して頂けるのではないかと内心期待している．

摂動計算の次の段階としては，ループを含むより高次の近似，およびそれに伴う繰り込みという大変に重要な項目があるが，そこまで手を広げようとすると一気にページ数が膨れ上ってしまうので，ここでは敢えて触れないことにした．但し，この「高次近似と繰り込み」は，筆者自身の主要な研究テーマの一つでもあるので，別に機会があれば是非まとめてみたいと思っている．この原稿を準備するに当たっては，京都大学・理学部・教授の九後汰一郎氏から多くの貴重なご教示を頂いた．また，徳島大学・大学院の大熊一正君（現 神戸大学・大学院・博士課程），植村秀明君，淘江宏文君には，講義ノートの誤植を幾つも指摘して頂いた．この場を借りてお礼申し上げたい．とは言っても，内容に

ついて責任転嫁するつもりは毛頭ない．本書に誤りがあれば，当然のことながら筆者の責任である．ご指摘を頂ければ幸いである．最後に，本書の出版においては，前述の青山秀明氏および吉岡書店の上川正二氏に大変お世話になったことを記すとともに，お二人に感謝致したい．

——— *To Hiroko* ———

1999年　5月　日置　善郎

本書に関する情報（補足や訂正など）につきましては
http://www.ias.tokushima-u.ac.jp/physics/theor/members/hioki-jp.html
をご覧下さい．

改訂に際して

本書の初版が出てから早くも5年半が経過した．出版前には，どのくらいの人に興味を持って貰えるのか皆目見当もつかなかったが，蓋を開けてみれば，予想より遥かに多くの方々に読んで頂け，大変嬉しく思っている．しかし，このことは，筆者に大きな責任が生じたことも意味している．

このような認識の下で初版を何度も読み直し，また，徳島大学・総合科学部の4年生・大学院生対象の講義および新潟大学・富山大学・金沢大学での集中講義において使用してみたところ，ホームページ上で公開している誤植を除けば内容自体に間違いはないものの，少々説明不足であったりもっと明快な表現に置き換えることが可能と感じられる部分などが何箇所か見つかった．そこで，時期的には若干早いかも知れないが，改訂を行うこととした．

大きな修正箇所は，(1) 第I部の「量子系の時間発展の記述」に，直感的な理解の助けになるように図も含めた説明を加えたこと，(2) 第II部において，散乱断面積の説明を，よりわかり易く書き直したこと，(3) 第III部のファインマン則・ファインマン図に関して，反粒子の取り扱いも含めた大幅な加筆を施したこと，である．更に，これ以外にも新たな図を加え，多くの場所で，表現上の理由から字句の置き換えを行った．また，初版のファインマン図は，すべて FEYNMAN.tex により描かれていたが，今回はより多くの機能を持つ feynMF で作図し直し，同時に図番号を付与した．これは本質的な内容に関わる修正ではないが，この結果，以前よりも全体的にずっと見やすくなったと思う．

一方，ディラック場やベクトル場の量子化，摂動の高次効果と繰り込み，ネータの定理と対称性などは，いずれも講義を進める中で新たに書き加えたい衝動に駆られた項目だが，すべて既存の本格的テキストで十分に解説されていること，および，初版について多くの場で「少ない頁数の中に必要最低限の項目が納まっている・摂動計算に焦点を絞って解説している」という評価を頂いてい

たことを思い出し，大幅な頁増につながるこれらの加筆は控えることとした．

最終原稿は，初版にもまして慎重にチェックしたつもりだが，修正や補足説明すべき点が発見された場合には，これまで同様ホームページ上での公開を予定しているので，読者の方々にもお気付きの点はご指摘をお願い致したい．最後になったが，京都大学・基礎物理学研究所・所長の九後汰一郎教授には初版と同様に今回も原稿に目を通して頂き，貴重なご意見を伺うことが出来た．本文の構成スタイルについては，京都大学・理学部の青山秀明教授から以前より頂いていた幾つかのコメントが大変に参考になった．ここに謝意を表したい．また，誤植の指摘や様々なコメントを寄せて頂いた徳島大学・新潟大学・富山大学・金沢大学・神戸大学の学生諸君，とりわけ徳島大学・大学院の藤田佐和子さん（2003年3月修了），丸山幸太君，神戸大学・大学院の馬渡健太郎君，ならびに改訂作業において大変お世話になった吉岡書店の前田重穂氏にお礼申し上げる．

2004年12月　日置　善郎

記　法

- 相対論記法

計量テンソル：　$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ の対角成分 $= (+1,\, -1,\, -1,\, -1)$

反変ベクトル：　$x^\mu \equiv (x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3) = (x^0,\, \boldsymbol{x})$

共変ベクトル：　$x_\mu \equiv (x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3) = g_{\mu\nu}x^\nu = (x^0,\, -\boldsymbol{x})$

内積：　$px = p^\mu x_\mu = p_\mu x^\mu = g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu = g^{\mu\nu}p_\mu x_\nu = p^0x^0 - \boldsymbol{px}$

微分記号：　$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu = (\partial/\partial x^0,\, \partial/\partial x^1,\, \partial/\partial x^2,\, \partial/\partial x^3) = (\partial/\partial t,\, \nabla)$

$\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu = (\partial/\partial x_0,\, \partial/\partial x_1,\, \partial/\partial x_2,\, \partial/\partial x_3) = (\partial/\partial t,\, -\nabla)$

$\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu = \partial^2/\partial t^2 - \Delta$

- 電荷

素電荷（電気素量）は e で表す（$e > 0$）．従って，電子の電荷 $= -e$

- 運動量の 3 次元積分要素

場の演算子の平面波展開（運動量展開）に現れる 3 次元積分要素

$$d^3\tilde{\boldsymbol{p}} \equiv d^3\boldsymbol{p}/[(2\pi)^3 2p^0]$$

- デルタ関数

$$\delta(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{\pm ipx}, \quad \delta^4(p) = \delta(p^0)\delta(p^1)\delta(p^2)\delta(p^3)$$

- 階段関数

$$\theta(x) = 1\ (x > 0 \text{ の時}),\ \ = 1/2\ (x = 0 \text{ の時}),\ \ = 0\ (x < 0 \text{ の時})$$

これを微分するとデルタ関数になる：$\delta(x) = d\theta(x)/dx$

- 単位行列・零行列

次元に関わらず，単位行列は I, 零行列は O で表すが，誤解の恐れのない場合には，単に 1, 0 と記すこともある．例えば，$1 + \gamma_5$ においては 1 は 4 行 4 列の単位行列であることは明らかだろう．

● 単位について

本書では，他の多くのテキストと同じく，ディラック定数 $\hbar\,(\equiv h/(2\pi))$ および光速 c を基準にとる自然単位系を用いる．この単位系では $\hbar$ も c も 1 という無次元の定数となる：

$$\hbar = c = 1$$

これは，単位の中に J·s を含む量を扱う場合にはその部分は $\hbar = 1.054571628 \times 10^{-34}$ J·s を基準として，また，m/s を含む量ならその部分は $c = 2.99792458 \times 10^{8}$ m/s を基準として「その何倍」という表し方をするということを意味する．例えば，光速それ自体は c の 1 倍ということで，上記のように次元なしの数 $c = 1$ になる．もう少し一般的な例として v [m/s] という或る物体の速さを考えると

$$v\ [\mathrm{m/s}] = \frac{v\ [\mathrm{m/s}]}{c\ [\mathrm{m/s}]}\, c\ [\mathrm{m/s}]$$

と変形でき，右辺で $v\ [\mathrm{m/s}]/c\ [\mathrm{m/s}]$ は「光速の何倍」という無次元の数値になるが，これが自然単位系でのその物体の速さである．また，特殊相対論には有名な $E = mc^2$ という関係式があり，この右辺の単位は $\mathrm{kg{\cdot}m^2/s^2}$ だが，自然単位系ではこのうち $\mathrm{m^2/s^2}$ の部分，つまり c^2 を 1 としてしまうため，エネルギーと質量が同じ次元を持つようになる．同様に，長さと時間は共にエネルギーの逆数の次元となる．

この単位系で与えられた量を通常の数値に直すには，元々の次元になるように $\hbar$ と c を組み合わせて掛けたり割ったりすればよい．つまり，通常の単位系で $a\hbar^m c^n$ という量は自然単位系では単に a となっているから，この a の本来の単位（次元）から m, n を決めて，a に $\hbar^m c^n$ を掛けてやるのである．散乱断面積の場合なら，GeV 単位で与えられた量を用いて計算すれば GeV^{-2} という単位になるが，これに $(\hbar c)^2\,(= 0.389379304\ \mathrm{GeV^2\,mbarn}:\ 1\ \mathrm{barn} = 10^{-28}\ \mathrm{m^2})$ を掛ければ通常の単位系の数値（面積の次元）に戻る：

$$[\ \text{mbarn 単位の断面積}\ ] = 0.389379304 \times [\ \mathrm{GeV}^{-2}\ \text{単位の断面積}\ ]$$

例えば，$2\,\mathrm{GeV}^{-2}$ という断面積は 0.778758608 mbarn である．

目　　次

III. ファインマン則と計算の具体例

付　　録

I. 古典力学から場の量子論へ

I.1 古典力学のラグランジュ形式：解析力学

力学に現れる基本方程式（運動方程式）は，ニュートン（Newton）の運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ である．単に質量と外力と加速度の関係というだけなら，その組み合わせには無限の種類があるが，自然は特にこの組み合わせを選んだということである．では，この $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ という形には，他の組み合わせに比較して何か特別な意味があるのだろうか？ また，電磁気学の基本方程式であるマクスウェル（Maxwell）の方程式は，扱う対象が異なるとはいえ同じ自然科学の方程式なのに，ニュートンの運動方程式とは一見全く異なる形をしている．両者を統一的に扱えるような，より基本的な法則はないのだろうか？ これらの疑問に対して，（100% 満足という訳にはいかないが）一つの興味深い解答を与えるのは**最小作用の原理**（Principle of least action）である．

この立場 –**ラグランジュ形式**（Lagrange formalism）という名で知られている– では，どんな物理系もそれに固有の**ラグランジアン**（Lagrangian）というスカラー量 L で規定される．そして，この L は，系の状態を記述する一般化座標（Generalized coordinate）q_i とその時間微分 $\dot{q}_i$（$i = 1 \sim n$：n はその系の自由度）の関数であるとされる：

$$L = L(q, \dot{q}) \equiv L(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n)$$

この系の運動の記述は，各 q_i の時間依存性，つまり $q_i(t)$ の具体的な関数形を見出すことで可能となる．そして，単に時間の関数というだけなら $q_i(t)$ の形は無限にある訳だが，実際には，それは系が従う法則で決まってしまう．では，

このように法則によって選ばれた関数形とその他の関数形は，何がどう違うのか？ これは，冒頭での問い「$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ という組み合わせには特別な意味があるか？」の別の表現だが，最小作用の原理は，これに対して次のように答える：

最小作用の原理 作用（Action）あるいは作用積分（Action integral）と呼ばれる量

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\, \dot{q}) \tag{I.1}$$

（$t_{1,2}$ は任意の時刻）は，自然界で実現される $q_i = q_i(t)$ に対して最小値（一般には極値）をとる．但し，端点での q_i の値 $q_i(t_{1,2})$ は固定されているものとする．

これを認めれば，逆に，この極値条件から出発して $q_i(t)$ を決める法則，つまり運動方程式を導くことが出来るのである．

以下，もう少し具体的に話を進めてみよう．$y = f(x)$ という関数の極値を微分で求める条件は $dy/dx = 0$ だった．つまり，極値を実現する点とは，そこから任意の微小量だけ変数を動かしても関数の値は変化しないような点である．上の原理を満たす関数についても同様のことが言える．但し，こんどは，$q_i(t)$ の関数形自体を次のように微小変化させても I の値は不変という条件となる：

$$q_i(t) \;\rightarrow\; q_i(t) + \delta q_i(t) \tag{I.2}$$

$$\dot{q}_i(t) \;\rightarrow\; \dot{q}_i(t) + \delta\dot{q}_i(t) = \dot{q}_i(t) + \frac{d}{dt}\delta q_i(t) \tag{I.3}$$

$$(\text{但し，}\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0)$$

これは,「微分」ではなく「変分（Variation）」あるいは「汎関数微分（Functional derivative)」と呼ばれる．但し，関数を微分することとその変分をとることは独立な操作だから，両者の順序は交換できる．(I.3) ではこの事実を用いた．

さて，実際に (I.2)・(I.3) に従って $q_i(t)$ の変分をとると，作用積分 I は

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q+\delta q,\, \dot{q}+\delta\dot{q}) - \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\, \dot{q}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2} dt\,\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\Big)\end{aligned}$$

（第２項の部分積分および　$\delta q_i(t_{1,2}) = 0$ より）

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) \right] \delta q_i$$

だけ変化することになる．そして，$q_i(t)$ が自然界に実現される形である時には，これが任意の微小量 $\delta q_i(t)$ に対して０になるというのだから

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) = 0 \tag{I.4}$$

が全ての $i\,(= 1 \sim n)$ について成立しなければならない．$q_i(t)$ を決める条件を与えるこの式が，ラグランジュ形式において基本的・中心的役割を果たす運動方程式であり，**ラグランジュ方程式**（Lagrange equation）という名で知られている．

この形式においては，さらに各自由度ごとに，言い換えれば各 q_i に対応して一般化運動量（Generalized momentum）p_i が

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{I.5}$$

と定義され，これから系のエネルギーを表す**ハミルトニアン**（Hamiltonian）H が，$p_1, p_2, \cdots$ と $q_1, q_2, \cdots$ の関数として

$$H(p,\, q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q,\, \dot{q}) \tag{I.6}$$

と導入される．但し，この右辺の全ての $\dot{q}_i$ は，上の $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ を逆に解いた $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p,\, q)$ で置き換えられている．なお，本書ではこれ以上立ち入らないが，このハミルトニアンを中心として展開される形式は**ハミルトン形式**（Hamilton formalism）と呼ばれている．

例：１次元の質点の運動

この場合には，ラグランジアンは運動エネルギー $T(\dot{q})\,(= m\dot{q}^2/2)$ と位置エネルギー $V(q)$（位置エネルギーは，通常 $\dot{q}$ には依らない）を用いて

$$L(q,\, \dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q) \tag{I.7}$$

と与えられることがわかっている．すると

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dV}{dq} = F, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \to \quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) = m\ddot{q}\,(= m\frac{d^2q}{dt^2})$$

だから，これを，1 自由度のラグランジュの方程式に代入すれば

$$m\ddot{q} = F$$

となり，確かにニュートンの運動方程式が導かれる．また，運動量は

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{I.8}$$

ハミルトニアンは

$$H(p,\, q) = p\dot{q} - L(q,\, \dot{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \tag{I.9}$$

となり，通常の古典力学でお馴染みの運動量と力学的エネルギーに一致する．

では上の例において，どうやって L の形がわかったのか？ 残念ながら現在のところ，与えられた系を支配するラグランジアンを発見するための基本原理はわかっていない．実際には,「すでにわかっている方程式が出るように」，或いはより一般的に言えば,「実験事実と合うように」L を決めるのである．と言ってしまうとガッカリする読者もいるかも知れないが，逆に言えば，数学的な形式を整備するだけでそれまでわからなかった新しい法則が導かれるはずもない．このラグランジュ形式の利点は，ともかく**系の情報をラグランジアンというただ一つのスカラー関数で表せる**ことにある．それに，実際には，ローレンツ共変性やその他の対称性などから，L の形はある程度までは知ることが出来る．しかも，次節で示すように，この形式は電磁気学にも適用できる．つまり，ニュートンの運動方程式もマクスウェルの方程式も，共にラグランジュの運動方程式として統一的に捉えることが可能になるのである．このように，力学や電磁気学をラグランジュ形式（＋ハミルトン形式）で書き表した体系は，**解析力学**（Analytical dynamics）と呼ばれている．

I.2 古典場のラグランジュ形式：場の解析力学

多粒子系のラグランジアンは，もし粒子同士が相互作用をしていなければ

$$L = \sum_i L(q_i,\, \dot{q}_i) \tag{I.10}$$

という形をとる．ここで，右辺の $L(q_i,\, \dot{q}_i)$ は，1 自由度の場合のラグランジアンである．このことを参考にすると，電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{H}$ のような，拡がった領域に連続的に分布する場の系もラグランジュ形式で記述できるようになる．

ここでは，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ やその他の場をまとめて一般的に ϕ と記すことにしよう．点 $\boldsymbol{x}$，時刻 t での場を $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ で表そうという訳である．さて，ここでの空間座標 $\boldsymbol{x}(=(x, y, z))$ は，粒子の記述に用いられる座標（上記の q）と同じ意味を持つのだろうか？ 答えは否である．粒子の座標は，その粒子の存在する場所を表しており，質点の場合には粒子そのものと言ってもよい．ところが，場の中に現れる座標は，単に，自由度としての空間の点を区別するパラメータに過ぎない．つまりは，多粒子系において座標につけられた添字 i と同じである．では，粒子の座標 q に対応する量は何かと言うと，それは場 ϕ 自身である．

従って，上記（I.10）に対応するこの系のラグランジアン（場のラグランジアン）は，$\boldsymbol{x}$ で区別される各 ϕ を記述するラグランジアン的な関数の総和の形をとる．但し，添字 i は離散的であるのに対し，パラメータとしての座標 $\boldsymbol{x}$ は連続的なので，この総和は $\boldsymbol{x}$ についての積分を用いて与えられることになる．4 元座標 $x^\mu = (t, \boldsymbol{x})$ を簡単に x と表せば，その形は

$$L = \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{L}(\phi(x),\, \partial_\mu \phi(x)) \tag{I.11}$$

である．[♯I.1] この右辺に現れた $\mathcal{L}$ が上述の各 ϕ を記述する関数で，**ラグランジアン密度**（Lagrangian density）と呼ばれている．[♯I.2]

[♯I.1] 時間座標と空間座標が同等に扱われる相対論的な理論では，$\dot{q}$ に対応する量は，一般に $\partial_\mu \phi(x) (\equiv \partial \phi(x)/\partial x^\mu)$ となる．

[♯I.2] 実際には，これも簡単にラグランジアンと呼ばれることも多い．以下でも特に厳密な区別はしない．

この系において，粒子系（自由度 n）の場合のラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big)=0 \quad (i=1\sim n)$$

に対応するものは，自由度を表すパラメータが連続変数であることより

$$\frac{\delta L}{\delta\phi(x)}-\partial_\alpha\frac{\delta L}{\delta(\partial_\alpha\phi(x))}=0 \tag{I.12}$$

（この第 2 項では相対論の習慣に従い $\sum$ 記号を省略したが，α について 0 から 3 まで和をとっている）という変分方程式となるが，これは，変分の公式

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\int d^3\boldsymbol{x}'F(\phi(x'))=\frac{\partial}{\partial\phi(x)}F(\phi(x))$$

により，次のような $\mathcal{L}$ についての通常の微分方程式に書き直せる：

$$\frac{\partial}{\partial\phi(x)}\mathcal{L}(\phi(x),\,\partial_\mu\phi(x))-\partial_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi(x))}\mathcal{L}(\phi(x),\,\partial_\mu\phi(x))\Big]=0 \tag{I.13}$$

また，この場合の一般化運動量 $\pi(x)$ は

$$\pi(x)=\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(x)}=\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(\phi(x),\,\partial_\mu\phi(x))\equiv\frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(\phi(x),\,\dot{\phi}(x),\,\partial_i\phi(x)) \tag{I.14}$$

$(i=1,2,3)$ と導入され，**ハミルトニアン密度**（Hamiltonian density）$\mathcal{H}$ とハミルトニアン H は

$$\mathcal{H}(\pi(x),\,\phi(x),\,\partial_i\phi(x))=\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathcal{L}(\phi(x),\,\dot{\phi}(x),\,\partial_i\phi(x)) \tag{I.15}$$

$$H=\int d^3\boldsymbol{x}\,\mathcal{H}(\pi(x),\,\phi(x),\,\partial_i\phi(x))=\int d^3\boldsymbol{x}\,\pi(x)\dot{\phi}(x)-L \tag{I.16}$$

となる．勿論（I.15）・（I.16）の中では，すべての $\dot{\phi}(x)$ は，$\pi(x)=\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}(x)$ を $\dot{\phi}(x)$ について解いた $\dot{\phi}=\dot{\phi}(\pi,\,\phi,\,\partial_i\phi)$ で置き換えられている．

更に，場が幾つかの成分を持っていたり，異なる種類の場が共存しているような場合には，その一つ一つの自由度（a）に対して（I.13）が成り立ち，また，

$\mathcal{H}$ を与える（I.15）式の右辺第 1 項は，すべての自由度についての和となる：ラグランジアン密度，ハミルトニアン密度をそれぞれ $\mathcal{L}(x), \mathcal{H}(x)$ と略記すれば

$$\frac{\partial}{\partial\phi_a(x)}\mathcal{L}(x) - \partial_\alpha\Big[\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha\phi_a(x))}\mathcal{L}(x)\Big] = 0 \tag{I.17}$$

$$\mathcal{H}(x) = \sum_a \pi_a(x)\dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(x) \tag{I.18}$$

すでに述べたように，電磁場もこの形式で記述することが出来る．事実

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{I.19}$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{I.20}$$

というラグランジアン密度から出発すると，(I.17）式（$\phi_a(x)$ には $A_\mu(x)$ が対応）により

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = 0$$

が得られるが，これは，共変形式で表された自由電磁場のマクスウェル方程式に他ならない．

I.3 古典力学の量子化：量子力学

古典物理学と比較しての量子物理学の大きな特徴は,「演算子（Operator）による物理量の表現」及び「実験結果に対する確率的予測」である．このうち前者に関しては，最も馴染み深いのは座標と運動量の関係だろう．1 次元の場合，座標変数を q とすれば，運動量は $p = -i\partial/\partial q$ と表される.[♯ I.3] 初等的な量子力学（Quantum mechanics）の議論においては，これを知っていれば十分とも思われるが，実際には，常に運動量だけが上記のような微分演算子で表される訳ではない．時には，逆に座標を演算子で表すこともある．その際に重要なのは，運動量と座標が，常に $[p,\ q] = -i$ といういわゆる**正準量子化**（Canonical

[♯ I.3]本書では自然単位系（$\hbar = c = 1$）を採用していることに注意.

quantization）の関係を満たすことである．この時，p と q は１次元の力学系における一般化運動量と一般化座標となっていることに注意しよう．

これより，もっと一般的な量子化の規則を得ることが出来る．つまり，まず注目している系の古典的なラグランジアンとその一般化運動量 p_i および一般化座標 q_i を探し，それらに対して

$$[p_i,\ q_j] = -i\delta_{ij}\,, \quad [p_i,\ p_j] = [q_i,\ q_j] = 0 \tag{I.21}$$

という**正準交換関係**（Canonical commutation relation）を設定すれば，その系を記述する量子論（の演算子）に到達するという訳である．

次に，物理的結果に対する確率的予測は，運動量を演算子と見なす表示では座標（および時間）を変数とする波動関数（Wave function）$\psi(q,\,t)$ により行われるが，その $\psi(q,\,t)$ が従う運動方程式（**シュレディンガー方程式**：Schrödinger equation）は，系の量子論的ハミルトニアン（古典的ハミルトニアン $H(p,\,q)$ の中で，p を量子論的演算子 $-i\partial/\partial q$ で置き換えたもの）を用いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,\,t) = H(-i\partial/\partial q,\,q)\psi(q,\,t) \tag{I.22}$$

と与えられる．このように，解析力学は，大変に量子力学に書き換え易い形式になっている．

さて，量子系の状態は，**状態ベクトル**（State vector）で表すことも出来る．この概念について簡単にまとめるために，波動関数 $\Psi(q,t)$ で記述される系を考える．この系において，ある物理量 A の測定をして A_n という結果が得られる**確率振幅**（Probability amplitude）は，波動関数の言葉では

$$\int dq\,\psi_n^*(q)\Psi(q,t)$$

（但し，$A\,\psi_n(q) = A_n\psi_n(q)$）であるが，この積分は，連続無限個の成分（$q$）を持つ二つのベクトル ψ_n と Ψ の内積と見なすことも出来る．２次元や３次元空間のベクトルを考えればわかるように，ベクトルの成分は基準となる座標系の

選び方に依存するが，ベクトルそれ自体はそれとは無関係である．従って，量子論の場合も，ベクトルの成分（波動関数）よりもベクトルそのもので系を記述する方がより一般的だろう．そこで，$\Psi(q,t)$ を第 q 成分とするベクトルを $|\Psi(t)\rangle$ と，また，左から掛かる「波動関数の複素共役」に対応するベクトルを $\langle\Psi(t)|$ と書く．これが状態ベクトルである．従って，状態 Ψ の中に ψ_n を見出す上記の確率振幅は，状態ベクトルを用いれば簡潔に

$$\langle\psi_n|\Psi(t)\rangle$$

と表すことが出来る．すると，座標を変数とする波動関数 $\Psi(q,t)$ は，状態（粒子）を座標 q において見出す確率振幅なので，$|\Psi(t)\rangle$ と粒子が q にいる状態を表す $|q\rangle$ の組み合わせ $\langle q|\Psi(t)\rangle$ ということになる：

$$\Psi(q,t) = \langle q|\Psi(t)\rangle$$

また，シュレディンガー方程式も，状態ベクトルの時間変化として

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H(p,q)|\Psi(t)\rangle \tag{I.23}$$

と表す方が，より一般的で応用範囲が広い．[♯I.4]

更に，この記法では様々な反応による状態の変化（遷移）も簡潔に表現できる．つまり，量子力学では相互作用も一般に演算子で与えられるので，例えば $|\psi_1\rangle$ という状態に V という相互作用が働いた結果それが $|\psi_1'\rangle$ になったとすれば，$|\psi_1'\rangle = V|\psi_1\rangle$ という訳である．従って，V の作用により $|\psi_1\rangle \to |\psi_2\rangle$ という遷移が起こる確率は $|\langle\psi_2|\psi_1'\rangle|^2 = |\langle\psi_2|V|\psi_1\rangle|^2$ で決まることになる．量子力学ではこの確率を求めるのが重要な課題の一つである．この点は**場の量子論**（Quantum field theory）に進んでも全く変わらない．

[♯I.4] (I.23) は，後（I.7 節）で説明する「シュレディンガー描像」の方程式である．ここで，演算子 p, q は時間依存性を持っていないことも一緒に憶えておこう．なお，この方程式から $\Psi(q,t)$ の方程式へ戻るには，その両辺に左から $\langle q|$ を掛け，$\int dq\,|q\rangle\langle q| = 1$（完全性条件）及び $\langle q|F(p)|q'\rangle = F(-i\frac{\partial}{\partial q})\delta(q-q')$（$F$ は任意の関数）という関係を用いればよい．

I.4 古典場の量子化：波動場の量子論

波動場の量子化を考えるにあたり，まず量子力学における離散固有値・連続固有値に対する波動関数の規格直交関係を思い出そう：

- 離散固有値の場合

$$\int dq\, \psi_i^*(q)\psi_j(q) = \delta_{ij}$$

- 連続固有値の場合

$$\int dq\, \psi_k^*(q)\psi_{k'}(q) = \delta(k - k')$$

つまり，離散量におけるクロネッカーのデルタは，連続量の場合にはディラック（Dirac）のデルタ（δ）関数となる．

この対応関係は量子化においても同様で，量子力学の出発点である同時刻での p と q の交換関係

$$[\,p_i,\ q_j\,] = -i\delta_{ij}$$

に対する波動場 ϕ_a の正準量子化の出発点は

$$[\,\pi_a(x),\ \phi_b(x')\,] = -i\delta_{ab}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{I.24}$$

である．但し，ここで x，x' は 4 元座標かつ $x^0 = x'^0 (= t)$ である．これで時刻 t における場の演算子 $\pi_a(x), \phi_a(x)$ が決まる．[♯I.5]

さて，量子力学は，原子構造や原子スペクトル，光電効果，黒体（空洞）輻射といった古典物理学では説明不可能な問題を解決する試みを通じて生まれてきた．では，古典場は何故量子化しなければならないのか？ 量子化して何かいいことがあるのだろうか？ 実は，光電効果は光が粒子性も持つことを要求するが，古典電磁場を量子化すると，自然に光の粒子像が現れてくるのである．ただ，電磁場は**ベクトル場**（Vector field）なので，その数学的取り扱いは少々複

[♯I.5] **注意**：以下この節においては時間 t を含む量が幾つか出てくるが，量子化した後の量（演算子）については，その t は任意の時刻ではなく，この「量子化の時刻」のことと理解して欲しい．それらがその後どのように時間発展していくかについては，この先 I.7 において考える．

雑になる．そこで，以下ではもっと簡単な1成分のみの場（**スカラー場**：Scalar field）を替りに用いて，古典場の量子化とその帰結の基本的事項を説明しよう．

スカラー場とは，ローレンツ変換（Lorentz transformation）$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ に対して

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

と振る舞う場である．電磁ポテンシャル（Electromagnetic potential）$A_\mu(x)$ は実であり，ローレンツゲージ（Lorentz gauge）においては相互作用がない時

$$\Box\, A_\mu(x)\,(\equiv \partial_\alpha \partial^\alpha A_\mu(x)) = 0 \tag{I.25}$$

を満たすので，これに倣って実スカラー場 $\phi(x)$ が

$$\Box\phi(x) = 0 \tag{I.26}$$

という運動方程式を満たす場合について考える．この場合の対応するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) \tag{I.27}$$

である．これから，一般化運動量 $\pi(x)$ も

$$\pi(x) = \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}(x)}\mathcal{L}(x) = \dot{\phi}(x) \tag{I.28}$$

と導かれる．

問題 I.1　ラグランジュ方程式（I.13）を用いて，実際に上記の $\mathcal{L}$ から運動方程式（I.26）が導かれることを示せ．

ここで，量子化の前に，上記の方程式（I.26）の解の形を見ておく必要があるが，同時に，そろそろ場の量子論を意識した話も始めないといけない．以下では，特に量子化の前と後での場の時間依存性に注意しながら読んで欲しい．

電磁気学でしばしば行われるように，解をフーリエ展開

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\; q(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$$

（$d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \equiv d^3\boldsymbol{k}/[(2\pi)^3 2k^0]$）の形で求めよう．これを（I.26）に代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2}q(\boldsymbol{k},t) + \boldsymbol{k}^2 q(\boldsymbol{k},t) = 0$$

という式が各 $\boldsymbol{k}$ ごとに得られるが，これはよく知られた調和振動子の方程式と同じ形であり，一般解は

$$q(\boldsymbol{k},t) = q_1(\boldsymbol{k})e^{-ik^0 t} + q_2(\boldsymbol{k})e^{ik^0 t} \qquad (k^0 = |\boldsymbol{k}|)$$

である．これより

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\, q_1(\boldsymbol{k})e^{-ik^0 t + i\boldsymbol{kx}} + q_2(\boldsymbol{k})e^{ik^0 t + i\boldsymbol{kx}}\,]$$

となるが，$\phi(x)$ は実スカラーであることを明示するために，右辺にその複素共役も加えよう：

$$\begin{aligned}\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\, & q_1(\boldsymbol{k})e^{-i(k^0 t - \boldsymbol{kx})} + q_2(\boldsymbol{k})e^{i(k^0 t + \boldsymbol{kx})} \\ & + q_1^*(\boldsymbol{k})e^{i(k^0 t - \boldsymbol{kx})} + q_2^*(\boldsymbol{k})e^{-i(k^0 t + \boldsymbol{kx})}\,]\end{aligned}$$

ここで，右辺の第 2 項と第 4 項で積分変数を $\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ と変えて

$$= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[\,[\,q_1(\boldsymbol{k}) + q_2^*(-\boldsymbol{k})\,]e^{-ikx} + [\,q_1^*(\boldsymbol{k}) + q_2(-\boldsymbol{k})\,]e^{ikx}\,\right]$$

$$(kx = k_\mu x^\mu = k^0 t - \boldsymbol{kx})$$

最後に $a(\boldsymbol{k}) \equiv q_1(\boldsymbol{k}) + q_2^*(-\boldsymbol{k})$ と置いて

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\, a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{I.29}$$

を得る．ここで，4 元運動量 k^μ が

$$k^2\,(= (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2) = 0 \quad \text{つまり} \quad k^0 = |\boldsymbol{k}| \tag{I.30}$$

を満たすことも解の条件であることを憶えておこう．これより，一般化運動量も

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\, -ik^0 a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + ik^0 a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{I.31}$$

と求まる.

ここで求めた解 $\phi(x), \pi(x)$ は，まだ量子化されていない古典場である．そして，それは**任意の時刻 t に適用できる**．しかしながら，これらを量子化して得られる演算子の時間依存性については，別に考察が必要である.

さて，この場合の量子化条件は（I.24）の交換関係（但し，自由度＝1なので δ_{ab} は不要）

$$[\,\pi(x),\ \phi(x')\,] = -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{I.32}$$

および (I.21) の $[\,p_i,\ p_j\,] = [\,q_i,\ q_j\,] = 0$ に対応する

$$[\,\pi(x),\ \pi(x')\,] = [\,\phi(x),\ \phi(x')\,] = 0 \tag{I.33}$$

$(x = (t, \boldsymbol{x}),\ \ x' = (t, \boldsymbol{x}'))$ である．これに伴い $a(\boldsymbol{k}), a^*(\boldsymbol{k})$ も

$$[\,a(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{I.34}$$

$$[\,a(\boldsymbol{k}),\ a(\boldsymbol{k}')\,] = [\,a^\dagger(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,] = 0 \tag{I.35}$$

という交換関係を満たす演算子 $a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ で置き換えられる.

問題 I.2　$a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ がこの交換関係を満たせば，実際に $\phi(x), \pi(x)$ の従う正準量子化の条件（I.32），(I.33）が導かれることを示せ.

また，ハミルトニアンも $a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ で表すことが出来る：

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\boldsymbol{x}\Big[\,\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)\,\Big] = \frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{x}\Big[\,\dot{\phi}^2(x) + \sum_{i=1}^{3}\partial^i\phi(x)\partial^i\phi(x)\,\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\int d^3\boldsymbol{x}\ \partial^\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\int d^3\boldsymbol{x}\ k^\mu p^\mu \\
&\qquad\qquad \times\Big[-a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p})e^{-i(k+p)x} + a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{-i(k-p)x} \\
&\qquad\qquad\quad + a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p})e^{i(k-p)x} - a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{i(k+p)x}\,\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\,(2\pi)^3\,(k^0p^0+\boldsymbol{kp}) \\
&\qquad \times\Big[-a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})e^{-i(k^0+p^0)t}+a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})e^{-i(k^0-p^0)t} \\
&\qquad\quad +a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})e^{i(k^0-p^0)t}-a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})e^{i(k^0+p^0)t}\Big]
\end{aligned}
$$

((I.30)式より $k^0=|\boldsymbol{k}|,\ p^0=|\boldsymbol{p}|$ なので)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\frac{1}{2k^0}\Big[(-k^{0\,2}+\boldsymbol{k}^2)a(\boldsymbol{k})a(-\boldsymbol{k})e^{-2ik^0t}+(k^{0\,2}+\boldsymbol{k}^2)a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k}) \\
&\qquad +(k^{0\,2}+\boldsymbol{k}^2)a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})-(k^{0\,2}-\boldsymbol{k}^2)a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(-\boldsymbol{k})e^{2ik^0t}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,\Big[a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})+a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\Big] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+\text{定数項}
\end{aligned}
\tag{I.36}
$$

ここで，最後の

$$
\text{定数項}=\frac{1}{2}\int d^3\boldsymbol{k}\,k^0\delta^3(0)
$$

は，単にエネルギースケールの原点をずらす意味（或いは「真空のエネルギー」の意味）しかないし，真空のエネルギーは0ととるのが自然なので，以後無視することにする．従って，この系のハミルトニアンは

$$
H=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,k^0\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})
\tag{I.37}
$$

となる．

(I.36) 式の計算には，この系の重要な性質が顔を出している：もし，演算子同士が交換関係ではなく反交換関係に従うならば，上記の H は,(I.36) の最後から2番目の段階（$aa^\dagger+a^\dagger a$ の部分）で単なる定数になってしまい，物理的に意味のない量となる．従って，$\Box\phi(x)=0$ を基礎方程式とする系は，**交換関係により量子化されなければならない**．実は，**ディラック方程式**（Dirac equation）に従う系において同様の計算をすると，逆に演算子が**反交換関係**（Anticommutation relation）に従う場合にのみ意味のある結果が出ることが知られている．

次に

$$
N\equiv\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})
\tag{I.38}
$$

という演算子を導入する．これは明らかにエルミート（hermite）であるからその固有値（Eigen value）は常に実数だが，N の場合，それは更に正または0であると言える．事実，固有値を ξ, 固有状態（Eigen state）を $|\xi\rangle\,(\neq 0)$ とすれば

$$\langle\xi|N|\xi\rangle\,(=\xi\langle\xi|\xi\rangle) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\langle\xi|a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})|\xi\rangle = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\langle a(\boldsymbol{k})\xi|a(\boldsymbol{k})\xi\rangle \;\geq\; 0$$

$$\langle\xi|\xi\rangle \;>\; 0$$

より $\xi \geq 0$ である．なお，ここでは $a(\boldsymbol{k})|\xi\rangle$ を $|a(\boldsymbol{k})\xi\rangle$ と表した．

問題 I.3　N はエルミート演算子であることを示せ．

上で導入した $|\xi\rangle$ に $a(\boldsymbol{p})$ を1個作用させたらどうなるだろう？ $a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle \neq 0$ なら

$$\begin{aligned} Na(\boldsymbol{p})|\xi\rangle &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{k}) - (2\pi)^3 2k^0\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\,]\,a(\boldsymbol{k})|\xi\rangle \\ &= a(\boldsymbol{p})N|\xi\rangle - a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle = (\xi-1)a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle \end{aligned} \tag{I.39}$$

つまり，$a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle$ は $\xi-1$ という固有値を持つ状態ということになるが，もし $(0\leq)\,\xi<1$ であったなら，$\xi-1<0$ となり，N の固有値は負にはならないという性質と矛盾してしまう．従って，この場合には $a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle$ という状態は存在しない，つまり $a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle=0$ でなければならない．これは任意の $\boldsymbol{p}$ に対して言えることだから

$$\int d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\,a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle\;(=N|\xi\rangle=\xi|\xi\rangle)=0$$

すなわち，$\xi<1$ であるならば常に $\xi=0$ でなければならない．

次に，$\xi\geq 1$ の場合を考えよう．上で見たように，この場合には $a(\boldsymbol{p})|\xi\rangle$ は（0でない限り）固有値が $\xi-1$ の状態として存在可能である．そこで同様に $a(\boldsymbol{p})$ を（種々の $\boldsymbol{p}$ について）次々と作用させていくと，固有値が $\xi-n$（<1,

但し n は正の整数）である状態に行き着く．すると，この状態には上の $\xi < 1$ の場合の議論が適用され，$\xi - n = 0$ でなければならなくなる．つまり，$\xi = n$ である．これより，**$\boldsymbol{N}$ の固有値は正の整数または 0 しかない**と結論できる．

ここで，N の固有値が 0 である状態を $|0\rangle$ と表すことにしよう．但し，$|0\rangle$ は $\langle 0|0\rangle = 1$ と規格化しておく．すると，上記のように任意の $\boldsymbol{p}$ に対して

$$a(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0 \tag{I.40}$$

である．従って

$$H|0\rangle \left(= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})|0\rangle\right) = 0 \tag{I.41}$$

つまり，$|0\rangle$ はエネルギーが 0 の状態を表していることになるが，これは**真空状態**（Vacuum state）と解釈できる．

では，この真空状態に $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ を 1 個作用させるとどんな状態が生まれるだろうか？

$$\begin{aligned} Ha^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle &= a^\dagger(\boldsymbol{p}) \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, k^0\, [\, a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})\,]|0\rangle \\ &= p^0 a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle \end{aligned} \tag{I.42}$$

となるから，これは，エネルギーが $p^0(= |\boldsymbol{p}|)$ の状態である．更に，同様の計算で

$$Na^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$$

となるから，N の固有値は 1．従って，$a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ はエネルギーが p^0 の粒子が 1 個存在する状態で，N はこの粒子の**個数演算子**（Number operator），$n(\boldsymbol{k}) \equiv a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ は**個数密度演算子**と解釈できる．しかも $p^0 = |\boldsymbol{p}|$ だから，この粒子の運動量は $\boldsymbol{p}$ かつ質量は 0 である．つまり，$a^\dagger(\boldsymbol{p})$ は運動量が $\boldsymbol{p}$ の**光子**（Photon）を 1 個つくる演算子（**生成演算子**：Creation operator）であることがわかる．同様の考察により，$a(\boldsymbol{p})$ は運動量が $\boldsymbol{p}$ の光子を 1 個消す演算子（**消滅演算子**：Annihilation operator）であることもわかる．つまり，古典場を量子化すること

により，極めて自然な形で粒子像が得られるのである．但し，ここでは例として簡単な実スカラー場を用いたので，生まれた光子像も本物ではないが，実際の電磁場（実ベクトル場）を量子化すると，スピン1を持つ現実の光子が得られる．

問題 I.4　$Na^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ であることを示せ．

問題 I.5　状態 $a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle$ の N, H に対する固有値を求めよ．

問題 I.6　$\langle 0|\phi(x)|\boldsymbol{p}\rangle = e^{-ipx}$ であることを確かめよ．但し，$|\boldsymbol{p}\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$, $p^\mu = (|\boldsymbol{p}|, \boldsymbol{p})$ である．

正規積

生成・消滅演算子がこのように導入されたところで，(I.36) 式から (I.37) 式への変形について再度考えてみよう．最後の段階で，定数項 $(= \int d^3\boldsymbol{k}\, k^0 \delta^3(0)/2)$ を手で落とす操作をした．しかし，この項は無限大の量であるし，また仮に有限であったとしても，それを勝手に取り除くことを不快・不審に感じる人もいるかも知れない．そこで，**正規積**（Normal product）という概念が導入される．上記の式変形が，すべて古典論の段階で行われたとしたら $a^*a = aa^*$ だから，そのような定数は現れない．そこで,「量子論に最適な形になるように，予め全ての式変形を済ませた後で，実際に量子論に移行する」と考えれば，この問題は回避される．もう少し具体的な表現をするなら,「場の積で与えられる量については，量子化した時にどの項においても生成演算子が全て消滅演算子の左側に来るように，古典論の段階で整理しておく」という要請を量子化の規則に付け加えるということである．この規則に従って作られた積を正規積と呼び，$:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):$ のように全体を二つの「:」で挟んで表す ($N[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)]$ という記法もある）．例えば $:aa^\dagger:= a^\dagger a$, $:a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger:= a_1^\dagger a_3^\dagger a_2$ である．但し，生成演算子，消滅演算子同士の順序はそのままにしておく．また，**フェルミ統計** (Fermi statistics) に従う場の場合には，$:aa^\dagger:= -a^\dagger a$ のように1回順序交換する毎にマイナス符号を付けるものとする．

この定義に従うと，二つの場の正規積は

$$
\begin{aligned}
:\phi(x)\phi(y): &= :\int d^3\tilde{\boldsymbol{p}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,[\,a(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}\,][\,a(\boldsymbol{q})e^{-iqy} + a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{iqy}\,]: \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{p}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,[\,:a(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{q}):\, e^{-i(px+qy)} + \,:a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{q}):\, e^{-i(px-qy)} \\
&\qquad + \,:a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{q}):\, e^{i(px-qy)} + \,:a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{q}):\, e^{i(px+qy)}\,] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{p}} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\,[\,a(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{q})e^{-i(px+qy)} + a^\dagger(\boldsymbol{q})a(\boldsymbol{p})e^{-i(px-qy)} \\
&\qquad + a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{q})e^{i(px-qy)} + a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{q})e^{i(px+qy)}\,]
\end{aligned}
\tag{I.43}
$$

となる．また，正規積で表された量の真空期待値（Vacuum expectation value）は常に 0 になる：

$$
\langle 0|\,:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):\,|0\rangle = 0 \tag{I.44}
$$

何故なら，その定義から必ず消滅演算子が $|0\rangle$ に，或いは生成演算子が $\langle 0|$ に直接掛かるからである．量子力学の量子化の規則に慣れている読者は，こんな規則を勝手に追加していいのか？と疑問に思うかも知れない．結論を先に言えば「追加してもよい」のである．正準量子化の出発点である正準交換関係 $[p,\ q] = -i$ も，もともとは我々が都合のいい結果が出るように“勝手に”導入した仮定である．ところが，この正準交換関係だけでは完全に満足のいく結果が出ないことがわかったので，ここで新たな量子化の規則を設定する訳である．

最後に，系が交換関係により量子化されたことの意味について，簡単に触れておこう．このように量子化された n 個の同種粒子系

$$
a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle
$$

においては $\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 = \cdots = \boldsymbol{p}_n$ と置いても何の問題も生じない．つまり，この粒子はいくつでも同時に同じ状態に入ることが出来る．これは，この粒子が**ボーズ統計**（Bose statistics）に従う粒子であることを意味する（**ボソン**或いは**ボーズ粒子**：Boson）．これが，もし反交換関係で量子化されていたなら，すで

に $n=2$ の段階で

$$a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle = -a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)|0\rangle \quad \Longrightarrow \quad a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle = 0 \tag{I.45}$$

つまり,「一つの状態には 1 個の粒子しか入ることは許されない」という**パウリの排他律**（Pauli exclusion principle）が現れる．この場合には，粒子はフェルミ統計に従うことになる（**フェルミオン**或いは**フェルミ粒子**：Fermion）.

I.5 多体系の量子力学と第 2 量子化：粒子場の量子論

電磁場は，すでに古典物理学の中に実在の波動場として存在しており，それを「古典力学の量子化 → 量子力学」に倣って量子化した結果，電磁場の量子論・光子像が生まれてきた．そこで導入された生成消滅演算子を使う形式は，粒子や反粒子の生成・消滅が頻繁に起こる相対論的な素粒子反応の記述に威力を発揮するので，電子系なども同じ形式で扱えれば大変便利だろう．

しかしながら，電子などは古典論では純粋な粒子なので，電磁場の量子化に倣うと言っても，量子化する波動などないようにも思える．ところが，量子力学に進むと，シュレディンガー方程式のような波動方程式に従う確率波が現れる．この波は一般に複素数で表されるため，古典電磁場のような「実在の波」ではないが，実は以下で示すように，この確率の波を量子化（**第 2 量子化**：Second quantization）することによって，対応する粒子系の場の量子論が得られることになる．

多体系の量子力学

まず，通常の量子力学における多体系の扱いを整理しよう．シュレディンガー方程式

$$H^{(1)}\varphi(\boldsymbol{x},t) = i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\boldsymbol{x},t) \qquad \Big(H^{(1)} = -\frac{1}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{x}) \Big) \tag{I.46}$$

で記述される非相対論的な粒子の系を例にとる（$H^{(1)}$ の (1) は，1 粒子に対す

る演算子であることを意味する）．ここで，お互いには作用し合っていない 2 個の粒子を考え，それぞれが，ある物理量 –例えばエネルギー– の固有状態 1，2 にいる時の固有関数を $\varphi_1(\boldsymbol{x}_1), \varphi_2(\boldsymbol{x}_2)$，固有値を $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ とする．この時，全体系のハミルトニアンは，粒子間相互作用がないことから

$$H = H_1^{(1)} + H_2^{(1)}$$

（下付き添字は作用する粒子を表す）となり，これより全体の波動関数は

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\varphi_2(\boldsymbol{x}_2)$$

と書ける．実際，

$$\begin{aligned} H\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) &= [\, H_1^{(1)}\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\,]\varphi_2(\boldsymbol{x}_2) + \varphi_1(\boldsymbol{x}_1)[\, H_2^{(1)}\varphi_2(\boldsymbol{x}_2)\,] \\ &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\varphi_2(\boldsymbol{x}_2) = \varepsilon\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \end{aligned}$$

（$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$）である．更に，これらが同種粒子である場合には，量子力学的な同等性（**不可弁別性**： Indistinguishability）により，$\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ は，$\boldsymbol{x}_{1,2}$ の交換に対して対称（Symmetric）または反対称（Antisymmetric）でなければならない．波動関数がどちらに従うかは，それぞれの粒子に固有の性質（ボソンかフェルミオンか）である．ここでは対称の場合を考えることにすると

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,\varphi_1(\boldsymbol{x}_1)\varphi_2(\boldsymbol{x}_2) + \varphi_2(\boldsymbol{x}_1)\varphi_1(\boldsymbol{x}_2)\,] \tag{I.47}$$

である．

さて，これを n 粒子系に拡張する．但し，話を簡単にするために，可能な量子状態は二つしかないとする．ということは，どんな 1 粒子状態の波動関数も $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x})$ の線型結合で表せるということである．これはかなり非現実的に響くが，一般的な場合に拡張すると式が複雑になり過ぎるし，この簡単な例でも本質は同じなので，ここではこのように仮定する．この二つの状態のうち，状

態1を n_1 個の，状態2を n_2 個の粒子が占めている（$n=n_1+n_2$）とすると，この状態を表す波動関数は

$$\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)=c_n(n_1,n_2)\sum_P\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\varphi_{p(2)}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n) \tag{I.48}$$

$$c_n(n_1,n_2)\equiv\sqrt{n_1!n_2!/n!}$$

である．但し，$\{p(1),\cdots,p(n)\}$ は，n_1 個の1と n_2 個の2を1列に並べた一つの順列であり，$\sum_P$ はこのような順列すべてに亙る和を表している．例えば，上記の2粒子系の波動関数 (I.47) は，$n_1=1, n_2=1$ という1番簡単な場合であり，$n_1=1, n_2=2$ の場合には，$\{p(1),\ p(2),\ p(3)\}$ としては $\{1,\ 2,\ 2\}, \{2,\ 1,\ 2\}, \{2,\ 2,\ 1\}$ の3通りがある．これと同時に，対応する規格化された状態ベクトルを $|n_1,n_2\rangle$ と書くことにする．

この全体系に作用する演算子 F（ハミルトニアンや運動量演算子など）は，粒子間の相互作用がない場合には，上の $H=H_1^{(1)}+H_2^{(1)}$ のように $F=\sum_i F_i^{(1)}$ と書ける．この F が $\Psi(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ に作用すると，粒子がある状態から1個減り，ある状態に1個増えるという結果になる．何故なら $F_i^{(1)}$ の作用で見れば

$$F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\boldsymbol{x}_i)=\langle 1|F^{(1)}|p(i)\rangle\varphi_1(\boldsymbol{x}_i)+\langle 2|F^{(1)}|p(i)\rangle\varphi_2(\boldsymbol{x}_i) \tag{I.49}$$

$$\langle a|F^{(1)}|p(i)\rangle=\int d^3\boldsymbol{x}\,\varphi_a^*(\boldsymbol{x})F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\boldsymbol{x})\ \ (a=1,\ 2)$$

だから，[♯I.6] 結果として，始めの波動関数 Ψ の中で $\varphi_{p(i)}(\boldsymbol{x}_i)$ が $\varphi_1(\boldsymbol{x}_i)$ または $\varphi_2(\boldsymbol{x}_i)$ に置き換わった関数が得られるが，それは状態 $p(i)(=1$または$2)$ から粒子が1個消え，状態1（第1項）または状態2（第2項）に粒子が1個生まれることを意味するからである．従って，F の行列要素の中では $\langle n_1+1,n_2-1|F|n_1,n_2\rangle$, $\langle n_1-1,n_2+1|F|n_1,n_2\rangle$, $\langle n_1,n_2|F|n_1,n_2\rangle$ のみが0でない値をとる．これ以外，例えば $\langle n_1-2,n_2+2|F|n_1,n_2\rangle$ などは粒子数は保存されているが，$\{\varphi_i\}$ が直交系である限りは全て0になってしまう．

[♯I.6] $F^{(1)}$ に添字 i を付ける理由は，それが $\boldsymbol{x}_i$ に作用するということを明記するためだけなので，ここの式のようにそのことが始めから明らかな場合には付ける必要はない．

ここで，実際に 0 でない行列要素 $\langle n_1-1,n_2+1|F|n_1,n_2\rangle$ を求めてみよう．

$$
\begin{aligned}
&\langle n_1-1,n_2+1|F|n_1,n_2\rangle\\
&=c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\sum_{P'}\sum_{P}\int d^3\boldsymbol{x}_1\cdots d^3\boldsymbol{x}_n\\
&\qquad\times\varphi^*_{p'(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi^*_{p'(n)}(\boldsymbol{x}_n)\,F\,\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)\\
&=c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\\
&\qquad\times\sum_{P'}\sum_{P}\int d^3\boldsymbol{x}_1\cdots d^3\boldsymbol{x}_n\,\varphi^*_{p'(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi^*_{p'(n)}(\boldsymbol{x}_n)\\
&\qquad\times\Big[\{F^{(1)}\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\}\varphi_{p(2)}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)\\
&\qquad\quad+\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\{F^{(1)}\varphi_{p(2)}(\boldsymbol{x}_2)\}\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)+\ \cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\quad+\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\varphi_{p(2)}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\{F^{(1)}\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)\}\Big]
\end{aligned}
$$

この最後の [ ] 内の i 番目の項 $\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\{F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\boldsymbol{x}_i)\}\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)$ を考える．今は，1 番目の量子状態から粒子が 1 個減る変化を考えているから，$p(i)=1$ でなければならない．更に，2 番目の量子状態に粒子が 1 個増えるのだから，$F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\boldsymbol{x}_i)=\langle 1|F^{(1)}|p(i)\rangle\varphi_1(\boldsymbol{x}_i)+\langle 2|F^{(1)}|p(i)\rangle\varphi_2(\boldsymbol{x}_i)$ と展開した時の第 2 項のみが 0 でない結果を与える．これは，すべての $i=1\sim n$ に共通に言えることだから，結局 $F^{(1)}\varphi_{p(i)}(\boldsymbol{x}_i)$ は全て $\langle 2|F^{(1)}|1\rangle\varphi_2(\boldsymbol{x}_i)$ に置き換わる：

$$
\begin{aligned}
&=c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\\
&\qquad\times\sum_{P'}\sum_{P}\int d^3\boldsymbol{x}_1\cdots d^3\boldsymbol{x}_n\,\varphi^*_{p'(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi^*_{p'(n)}(\boldsymbol{x}_n)\\
&\qquad\times\langle 2|F^{(1)}|1\rangle\Big[\varphi_2(\boldsymbol{x}_1)\varphi_{p(2)}(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)\\
&\qquad\quad+\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\varphi_2(\boldsymbol{x}_2)\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)\\
&\qquad\quad+\ \cdots\cdots\cdots\ +\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi_{p(n-1)}(\boldsymbol{x}_{n-1})\varphi_2(\boldsymbol{x}_n)\Big]
\end{aligned}
$$

但し，ここの $\sum_P$ は，n_1-1 個の 1 と n_2 個の 2 の並べ方についての和であることは明らかだろう．ここで，左側から掛かる $\sum_{P'}\varphi^*_{p'(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi^*_{p'(n)}(\boldsymbol{x}_n)$ について考えてみると，これが右側の第 i 番目の項，つまり $\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi_{p(i-1)}(\boldsymbol{x}_{i-1})$

$\varphi_2(\boldsymbol{x}_i)\varphi_{p(i+1)}(\boldsymbol{x}_{i+1})\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)$ に掛かって積分される時には，$p'(i)=2$ でなければならない．従って

$$
\begin{aligned}
&= c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \sum_{i=1}^{n}\sum_{P'}\sum_{P}\int d^3\boldsymbol{x}_1\cdots d^3\boldsymbol{x}_n \\
&\quad \times|\varphi_2(\boldsymbol{x}_i)|^2\varphi^*_{p'(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi^*_{p'(i-1)}(\boldsymbol{x}_{i-1})\varphi^*_{p'(i+1)}(\boldsymbol{x}_{i+1})\cdots\varphi^*_{p'(n)}(\boldsymbol{x}_n) \\
&\quad \times\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)\cdots\varphi_{p(i-1)}(\boldsymbol{x}_{i-1})\varphi_{p(i+1)}(\boldsymbol{x}_{i+1})\cdots\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)
\end{aligned}
$$

更に，i 番目以外の項でも $p'(1)=p(1)$, $p'(2)=p(2)$, $\cdots$, $p'(n)=p(n)$ でなければ積分は 0 になってしまうから

$$
\begin{aligned}
&= c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \sum_{i=1}^{n}\sum_{P}\int d^3\boldsymbol{x}_1\cdots d^3\boldsymbol{x}_n \\
&\quad \times|\varphi_2(\boldsymbol{x}_i)|^2|\varphi_{p(1)}(\boldsymbol{x}_1)|^2\cdots|\varphi_{p(i-1)}(\boldsymbol{x}_{i-1})|^2|\varphi_{p(i+1)}(\boldsymbol{x}_{i+1})|^2\cdots|\varphi_{p(n)}(\boldsymbol{x}_n)|^2 \\
&= c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!} \\
&= c_n(n_1-1,n_2+1)c_n(n_1,n_2)\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \frac{n!}{(n_1-1)!n_2!} \\
&= \sqrt{n_1(n_2+1)}\langle 2|F^{(1)}|1\rangle
\end{aligned}
$$

なお，下から3番目の等号（式変形）では，n_1-1 個の 1 と n_2 個の 2（$n_1+n_2=n$）を 1 列に並べる方法は $(n-1)!/[(n_1-1)!n_2!]$ 通りあるということを用いた．従って

$$
\langle n_1-1,n_2+1|F|n_1,n_2\rangle=\sqrt{n_1(n_2+1)}\langle 2|F^{(1)}|1\rangle \tag{I.50}
$$

以上の計算は，量子状態の数が m の場合にも容易に拡張でき，(I.50）に対応する行列要素は

$$
\langle n_i-1,n_j+1|F|n_i,n_j\rangle=\sqrt{n_i(n_j+1)}\langle j|F^{(1)}|i\rangle \tag{I.51}
$$

となる．また，同様の計算により，F の期待値（平均値）も求まる：

$$
\langle F\rangle=\sum_{i=1}^{m}\langle i|F^{(1)}|i\rangle n_i \tag{I.52}
$$

問題 I.7　これらの式が実際に成立することを確認せよ．

生成・消滅演算子と第2量子化

多体系の量子力学では以上のような面倒な計算が必要だが，これは，本節の冒頭で述べたように，第2量子化という手法により大幅に簡単化される．以下，これを説明していこう．

まず，系の記述には波動関数ではなく状態ベクトルのみを用いることにし，かつ実際に必要な情報は「どの量子状態の中に何個の粒子が存在するか」であることを考え，すでに先の例で用いた記法の拡張として

$$|\, n_1,\, n_2,\, \cdots\, n_m \,\rangle$$

という表現を用いる．但し，m は可能な量子状態の数，n_i は i 番目の量子状態を占める粒子数である．また，このベクトルは

$$\langle\, n_1,\, n_2,\, \cdots\, n_m \,|\, n_1,\, n_2,\, \cdots\, n_m \,\rangle = 1$$

と規格化されているとする．これで，系の状態は完全に指定できる．

さて，粒子系の場合には，波動場の場合とは異なり，粒子を1個，2個と生成したり消滅させたりする演算子は容易に導入することが出来る．i 番目の量子状態にある粒子の消滅演算子 a_i を

$$a_i|\, n_i \,\rangle = \sqrt{n_i}|\, n_i - 1 \,\rangle \tag{I.53}$$

で定義しよう．但し，i 番目以外の状態の粒子数は変化しないということで省略した．すると

$$\langle\, n_i - 1 \,|a_i|\, n_i \,\rangle = \sqrt{n_i}$$

のみが a_i の0でない行列要素である．これより

$$\langle\, n_i - 1 \,|a_i|\, n_i \,\rangle^* = \sqrt{n_i} = \langle\, n_i \,|a_i^\dagger|\, n_i - 1 \,\rangle$$

だから，$a_i^\dagger|\, n_i - 1 \,\rangle = \sqrt{n_i}|\, n_i \,\rangle$ あるいは

$$a_i^\dagger|\, n_i \,\rangle = \sqrt{n_i + 1}|\, n_i + 1 \,\rangle \tag{I.54}$$

というように生成演算子も導入できる．すると，粒子数が確定している任意の状態 $|n\rangle \equiv |n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots, n_j, \cdots\rangle$ に対して

$$[\,a_i,\ a_i^\dagger\,]|n\rangle = |n\rangle,\ \ [\,a_i,\ a_j^\dagger\,]|n\rangle = 0 \qquad (i \neq j)$$
$$[\,a_i,\ a_j\,]|n\rangle = [\,a_i^\dagger,\ a_j^\dagger\,]|n\rangle = 0$$

が成立することは容易に確かめられるから，

$$[\,a_i,\ a_j^\dagger\,] = \delta_{ij} \tag{I.55}$$

$$[\,a_i,\ a_j\,] = [\,a_i^\dagger,\ a_j^\dagger\,] = 0 \tag{I.56}$$

が得られる．[♯ I.7]

問題 I.8　$a_i a_j^\dagger$ と $a_j^\dagger a_i$ の作用結果が実際に上記の関係を満たすことを示せ．

このように導入された生成・消滅演算子を用いると，演算子 F は

$$F = \sum_{i,j} \langle i|F^{(1)}|j\rangle a_i^\dagger a_j \tag{I.57}$$

と表すことが可能になる．事実，これを用いれば

$$\begin{aligned}\langle\, n_i - 1, n_j + 1\,|F|\, n_i, n_j\,\rangle &= \sum_{k,l} \langle k|F^{(1)}|l\rangle \langle\, n_i - 1, n_j + 1\,|a_k^\dagger a_l|\, n_i, n_j\,\rangle \\ &= \langle j|F^{(1)}|i\rangle \sqrt{n_i(n_j+1)}\end{aligned}$$

$$\langle\, F\,\rangle = \sum_{i,j} \langle i|F^{(1)}|j\rangle \langle\, n_1, \cdots, n_m\,|a_i^\dagger a_j|\, n_1, \cdots, n_m\,\rangle = \sum_i \langle i|F^{(1)}|i\rangle n_i$$

のように，波動関数を用いた計算（I.51），（I.52）と同じ結果がずっと簡単に導き出せる．

また，ハミルトニアンも

$$H = \sum_{i,j} \langle i|H^{(1)}|j\rangle a_i^\dagger a_j \tag{I.58}$$

♯ I.7 波動場の量子化のところでは，現在 高エネルギー物理の世界で標準となっている **“共変的規格化**（Covariant normalization）”$[\,a(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ を用いたが，ここでの話は単なる例なので，必要な式ができるだけ簡単になるような規格化を採っている．

となるが，特に $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ として $H^{(1)}$ の固有状態（$H^{(1)}\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_i\varphi_i(\boldsymbol{x})$）をとれば

$$H = \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i \tag{I.59}$$

となる．

ただ，このままでは生成・消滅演算子を“手で”導入しなければならないように見えるが，実際にはもっと系統的に行える．それを見るために

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \sum_i a_i\varphi_i(\boldsymbol{x})e^{-i\varepsilon_i t} \tag{I.60}$$

と置こう．すると，この演算子 $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ は

$$H^{(1)}\Phi(\boldsymbol{x}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{x}, t)$$

を満たすが，これは 1 個の粒子が従うシュレディンガー方程式（I.46）と全く同じ形である．また，この $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$ と $\Phi^\dagger(\boldsymbol{x}, t)$ の間には

$$\begin{aligned}[\,\Phi(\boldsymbol{x}, t),\ \Phi^\dagger(\boldsymbol{x}', t)\,] &= \sum_{i,j}\varphi_i(\boldsymbol{x})\varphi_j^*(\boldsymbol{x}')e^{-i(\varepsilon_i-\varepsilon_j)t}[\,a_i,\ a_j^\dagger\,] \\ &= \sum_i \varphi_i(\boldsymbol{x})\varphi_i^*(\boldsymbol{x}') = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}$$

（最後の等号では $\{\varphi_i\}$ の完全性の条件を用いた）という同時刻交換関係も成立する．ここで，Φ を電磁場と同じように場の量（一般化座標）と見なせば，上記のシュレディンガー方程式は

$$\mathcal{L} = i\Phi^*\dot{\Phi} + \frac{1}{2m}\Phi^*\Delta\Phi - V\,\Phi^*\Phi \tag{I.61}$$

から導かれるが，この時 Φ に正準共役な一般化運動量は

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\Phi}} = i\Phi^*$$

となるので，演算子に移行する時には $\Phi^* \to \Phi^\dagger$ であることを考慮して，上記の同時刻交換関係は

$$[\,\Pi(\boldsymbol{x}, t),\ \Phi(\boldsymbol{x}', t)\,] = -i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

と書き直せる．そして，これは正に正準量子化の条件に一致する．

従って，粒子系を場の理論形式に移行させるには，まず1個の粒子が満たすシュレディンガー方程式の解を古典的波動のように考え，対応するラグランジアンと一般化運動量を求めて正準量子化条件を課す．そして，場の量を，例えばエネルギーあるいは運動量の固有関数系で展開し，その展開係数を生成・消滅演算子と読み替えればいいのである．結局，これは**波動場の量子化と全く同じ手続き**である.[♯I.8] 但し，波動場（電磁場）の場合には，すでに古典論の段階で波が存在していたので，直接それを量子化すればよかったが，粒子系の場合には，量子力学へ移行して初めて量子化すべき「波」が現れるという訳である．第2量子化という名前はここに由来している．

I.6 場の量子論の形式

ここで，系の量子化から場の量子論を構成する手続きを整理しておこう．但し，すでに示したように，波動系も粒子系も同じ形式で記述できるので，これ以降は波動場の量子論・粒子場の量子論などとは言わず，まとめて「**場の量子論**」と呼ぶことにする．なお，量子化については，本書では一貫して「正準量子化」法を採用しているが，この他に「経路積分（Path-integral）量子化」や「確率過程（Stochastic）量子化」といった方式もあることを付記しておく．

(1) 対象となる系のラグランジアンを見出し，それより一般化座標，一般化運動量および場（以下 $\phi(x)$ と表す）が従う運動方程式を求め，完全系を構成するその運動方程式の解で $\phi(x)$ を展開する．

[♯I.8]波動場の方程式の解（I.29）は a と a^* の項を両方含んでいるが,（I.60）は a の項しか含んでいないので，“全く同じ”と言ってしまうと抵抗を感じる読者もいるかも知れないが，この差は，この節の説明を，読者に最も馴染み深いであろう非相対論的なシュレディンガー方程式に基いて行ったことから生じている．つまり，e^{-ikx} が $\Box\phi(x)=0$ の解なら e^{ikx} も解であるのに対し，$\varphi_i(\boldsymbol{x})e^{-i\varepsilon_i t}$ がシュレディンガー方程式の解でも $\varphi_i^*(\boldsymbol{x})e^{i\varepsilon_i t}$ は解にはならないということがその差の出所である．従って，見掛けは異なるが,（I.29）式も（I.60）式もそれぞれ対応する運動方程式の一般解である．

(2) 一般化座標と一般化運動量の間に同時刻（反）交換関係を設定し，それらを演算子と読み替える（場の量子化）．これでこの時刻における場の演算子が決まる．その際，$\mathcal{L}(x)$ の中の場の積は，すべて正規積として扱う．同時に，その量子化条件より $\phi(x)$ の展開係数 $a, a^\dagger$ の間の（反）交換関係を求める．これにより，$a, a^\dagger$ は，それぞれ今考えている解が表す状態の粒子あるいは反粒子を 1 個消す演算子（消滅演算子），および 1 個生み出す演算子（生成演算子）と解釈できるようになる．運動量の固有状態（平面波：Plane wave）による展開がよく知られた例だが，他に角運動量の固有状態（球面波： Spherical wave）による展開などを考えることもある．

(3) 消滅演算子 a を用いて $a|0\rangle = 0$ という条件で真空状態を定義する．次に，その $|0\rangle$ に生成演算子を作用させて，粒子数・運動量が確定した状態を構成していく：$|\boldsymbol{p}\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$，$|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\rangle = a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle, \cdots$．このように作られた状態ベクトルの全体 $\{\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\rangle\,\}$ は，個数演算子 N の固有ベクトル系として完全系を構成する．より詳しく言えば，$\{\,|\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle\,\}$ は，基底として一つのヒルベルト空間（Hilbert space）を張ることになる．量子力学・場の量子論で重要な役割を果たすこの空間と基底は，それぞれ**フォック空間**（Fock space），**フォック基底**（Fock basis）と呼ばれている．

上記 (3) について，少し補足しておく．$\{\,|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\rangle\,\}$ が完全系を構成するということは，任意の物理的状態 $|\Psi\rangle$ が

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_i\, |\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle\langle\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n|\Psi\rangle \tag{I.62}$$

と展開できるということである.[♯I.9] この展開式は，**多体系の量子力学と場の量子論の同等性**も示している．つまり，右辺の展開係数 $\langle\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n|\Psi\rangle$ は，n 粒子系の（運動量表示）波動関数に他ならず，従って，$|\Psi\rangle$ による状態の場の量子

[♯I.9] (I.62) の右辺の正確な意味については II.5 の (II.38) 式およびそれに続く説明参照.

論的記述は，1粒子波動関数，2粒子波動関数，$\cdots$ の全体による量子力学的な記述と同等という訳である．

以下，もう少し具体的に

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \tag{I.63}$$

で記述される系を例として，場の量子化の手続きをスケッチしよう．これは I.4 で扱った系（I.27）を拡張した実スカラー場の系である．但し，必要な計算はすでに I.4 で詳しく説明したものとほとんど同じなので，ここでは要点のみを記す．まず，このラグランジアンからは，ラグランジュ方程式として

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{I.64}$$

が導かれる．これは**クライン-ゴルドン方程式**（Klein-Gordon equation）と呼ばれている．この方程式の古典解は

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{I.65}$$

であることは容易に確かめられる．但し，ここでの解の条件は

$$k^0 = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$$

或いは同じことだが

$$k^2 = k^\mu k_\mu = m^2$$

である．これより ϕ に共役な運動量も

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,-ik^0 a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + ik^0 a^*(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,] \tag{I.66}$$

と表される．これらに対して正準交換関係

$$[\,\pi(x),\ \phi(x')\,] = -i\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \tag{I.67}$$

および

$$[\,\pi(x),\ \pi(x')\,] = [\,\phi(x),\ \phi(x')\,] = 0 \tag{I.68}$$

($x=(t,\boldsymbol{x})$, $x'=(t,\boldsymbol{x}')$) を要請すれば，ϕ, π は時刻 t で定義された演算子となり，その運動量展開 (I.65), (I.66) における展開係数も

$$[\,a(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,] = (2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$$

$$[\,a(\boldsymbol{k}),\ a(\boldsymbol{k}')\,] = [\,a^\dagger(\boldsymbol{k}),\ a^\dagger(\boldsymbol{k}')\,] = 0$$

を満たす演算子となる：

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,]_{x^0=t} \tag{I.69}$$

$$\pi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,[\,-ik^0 a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + ik^0 a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,]_{x^0=t} \tag{I.70}$$

$a(\boldsymbol{k})$, $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ が質量 m，運動量 $\boldsymbol{k}$ のスカラー粒子の生成・消滅演算子になっていることは，I.4 と全く同様に示すことが出来る．

さて，ここまでは相互作用は考えてこなかった．実を言うと，相互作用がある時に系を量子化し必要な量をそれに基づいて計算するのは，上記の自由場の量子論とは大きく異なり大変に難しい．上の実スカラー場系に $\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = -\lambda\phi^4/4!$ という相互作用項を加えた

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \tag{I.71}$$

というラグランジアンを考えてみよう．これは $\lambda\phi^4$ 模型と呼ばれており，λ は相互作用の強さを特徴づける**結合定数** (Coupling constant) である．このとき，場が従う方程式は

$$(\Box + m^2)\phi(x) = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3(x) \tag{I.72}$$

となる．この例からわかるように，相互作用の存在により場の運動方程式は一般に

$$(\Box + m^2)\phi(x) = j(x) \tag{I.73}$$

という形に変わる．ここでも，この解を

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, q(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$$

と展開することは可能だが，これを（I.73）式に代入しても，自由場の時のような調和振動子型の微分方程式は得られない．全体が実になるように係数 $q(\boldsymbol{k}, t)$ を分解して

$$\phi(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\, a(\boldsymbol{k}, t) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} + a^*(\boldsymbol{k}, t) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\,]$$

と書いても，$a(\boldsymbol{k}, t)$, $a^*(\boldsymbol{k}, t)$ の時間依存性は，具体的に相互作用の形が与えられないと決定できないし，また，$\lambda\phi^4$ 模型のように $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ を決めたとしても，その形はかなり複雑になるため，生成・消滅演算子のような解釈は無理である．

そこで，散乱を扱う場合には，反応のずっと前および後では相互作用の影響は 0 になると仮定し，そのような時間領域で系の量子化を行う．例えば，反応が起こる時刻を 0 ，また ϵ を無限小定数として，相互作用項に $e^{-\epsilon|t|}$ というような因子が掛かっていると仮定する訳である．事実，この因子は，時間が有限の時には単に 1 になってしまうだけだが，時間が $\pm\infty$ になると効いてくる（0 になる）．このような立場では，自由な場の生成演算子から構成された状態ベクトルが，相互作用の影響の下で如何に時間発展していくかを調べることになる．この「量子系の時間発展の記述の方法」が次節の主題である．

I.7 量子系の時間発展の記述

これまでに繰り返し説明したように，系の量子化は，ある時刻 t_0 を選びそこで場の量の間に同時刻（反）交換関係

$$[\, \pi_a(x),\ \phi_b(y)\,]_{x^0=y^0(=t_0)} = -i\delta_{ab}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

を設定することにより行われる．次に，得られた場の演算子を例えばフーリエ展開し，その係数として現れる生成演算子を用いて状態を構成する．これで，こ

の時刻における演算子 $\phi(\boldsymbol{x}, t_0)$ と状態 $|\Psi(t_0)\rangle$ が決まる訳だが，物理として重要なのは，この系が，このあと時間の経過と共に相互作用の影響でどのように変化していくかである．ある場合には，粒子同士が衝突し別の粒子を生成するだろう．或いは，幾つかの粒子が崩壊するかも知れない．ともかく，どんな変化がどんな確率で起こるかを計算し，それを実験結果と比較することが，系とそこで働く力（相互作用）の性質の研究にとって必要不可欠である．

系の時間発展の代表的な記述法（描像）には「**シュレディンガー描像**（Schrödinger picture）」，「**ハイゼンベルク描像**（Heisenberg picture）」と「**朝永-ディラック描像**（Tomonaga-Dirac picture）（または**相互作用描像**：Interaction picture）」の 3 種類がある．とは言っても，これらの間の差は本質的なものではなく，単に（異なる座標系から同一の現象を見るのと同じく）立場の違いである．量子化の時刻 t_0 において定義された演算子 $Q(t_0)$ の期待値（平均値）$\langle\Psi(t_0)|Q(t_0)|\Psi(t_0)\rangle$ が，時間の進行に伴って以後どのように変化していくかを考えてみよう．一般には，演算子も状態ベクトルも共に時間変化し，時刻 t においては $\langle\Psi(t)|Q(t)|\Psi(t)\rangle$ となるはずである．ところがシュレディンガー描像においては，この変化は，すべて状態ベクトルの時間発展により起こるという立場をとる．一方，ハイゼンベルク描像では演算子のみが時間発展を担う．これに対して朝永-ディラック描像はその中間的な立場をとり，演算子・状態ベクトル共に時間発展する．もちろん，どれを使っても同じ物理的結果が得られるように構成されているが，これから先説明するように，摂動計算のためには 3 番目の朝永-ディラック描像が大変便利である．

以下ではシュレディンガー描像，ハイゼンベルク描像，朝永-ディラック描像における演算子および状態ベクトルには，それぞれ S, H, T という添字を付けることにする．但し，どの描像でも同じになる量には何も付けない．特に，基準となる量子化の時刻 t_0 の場の演算子と状態ベクトルは，$\phi_0(\boldsymbol{x})$, $|\Psi_0\rangle$ と表すことにする．

1．シュレディンガー描像

この描像では，時刻 t_0 での量子化の後，演算子は全てそこで決まったもの $\phi_0(\boldsymbol{x})$ が使われ，状態の方が

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = H|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \tag{I.74}$$

に従い変化していく．ここで，ハミルトニアンも演算子なので $\phi_0(\boldsymbol{x})$ で表されている．この $\phi_0(\boldsymbol{x})$ に含まれる $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ が，この描像で用いられる生成演算子であり，フォック基底もこの生成演算子から作られる．この描像での場の演算子はしばしば $\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x})$ と表されるが，これは $\phi_0(\boldsymbol{x})$ のことである：

$$\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{x}) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right]_{x^0=t_0} \tag{I.75}$$

上記の微分方程式（I.74）を，$|\Psi(t_0)\rangle_{\mathrm{S}} = |\Psi_0\rangle$ という境界条件で解くのがこの描像で必要な作業であるが，その解は

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \tag{I.76}$$

あるいは，時刻 $t_{1,2}$ の状態の関係として

$$|\Psi(t_2)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iH(t_2-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH(t_1-t_0)}|\Psi_0\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}|\Psi(t_1)\rangle_{\mathrm{S}}$$

と書ける．但し，(I.76）は相互作用がない場合（$H = H_0$ と表す）には

$$H_0|\Psi_0\rangle = H_0 a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots|0\rangle = (p_1^0 + p_2^0 + \cdots)|\Psi_0\rangle = E|\Psi_0\rangle$$

（$E \equiv p_1^0 + p_2^0 + \cdots$ は状態 $|\Psi_0\rangle$ の全エネルギー）より

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} = e^{-iE(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

となるが，相互作用が働く場合には，単に形式的なものとなる.[♯I.10] しかし，ともかくこの（I.76）式を用いれば，時刻 t_i において Ψ_i という状態にあった系

[♯I.10] ここで"形式的"というのは，確かに（I.76）は方程式（I.74）を満たしはするが，実際には $e^{-iH(t-t_0)}$ というのは無限個の項の和なので，これを使っても，相互作用がある場合には具体的な計算はすぐには出来ないという意味である．

が，時刻 t_f に Ψ_f という状態になる確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f)$ も，(形式的ながら) コンパクトな式で表せる：話を具体的にするために，Ψ_i, Ψ_f は運動量がそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ の n 粒子系，および $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_m$ の m 粒子系とすると，対応する状態ベクトルは

$$|\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} = a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle$$
$$|\Psi_f\rangle_{\mathrm{S}} = a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_2)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{q}_m)|0\rangle$$

と与えられ

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(\Psi_i \to \Psi_f) = {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi_f|e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi(t_i)\rangle_{\mathrm{S}} \tag{I.77}$$

(但し，ここで $|\Psi(t_i)\rangle_{\mathrm{S}} = |\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}}$)

である．

なお，通常はシュレディンガー描像での演算子や状態は時刻 $t=0$ の量として導入されるが，ここでは一般性を保つために $t=t_0$ を基準とした．従って，以下ではしばしば他の教科書と $e^{(-)iHt_0}$ といった量だけの差が現れる．これが気になる読者は本書の t_0 を全て 0 と置くか，あるいは，逆に他の教科書の対応する箇所で全ての時間変数 t を $t-t_0$ で置き換えればよい．

2．ハイゼンベルク描像

この描像では，逆に状態はそのままで演算子の方が時間発展する．但し，すでに述べたように，どちらの描像でも演算子の期待値は同じになるように構成される．従って

$$\begin{aligned}\langle\Psi_0|Q_{\mathrm{H}}(t)|\Psi_0\rangle &= {}_{\mathrm{S}}\langle\Psi(t)|Q(t_0)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{S}} \\ &= \langle\Psi_0|e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \end{aligned} \tag{I.78}$$

つまり，

$$Q_{\mathrm{H}}(t) = e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)} \tag{I.79}$$

あるいは，ここでも時刻 $t_{1,2}$ の関係として表せば

$$Q_{\rm H}(t_2) = e^{iH(t_2-t_1)} Q_{\rm H}(t_1) e^{-iH(t_2-t_1)}$$

である．(I.79) の両辺を時間微分すると

$$i\frac{\partial}{\partial t} Q_{\rm H}(t) = [\, Q_{\rm H}(t),\ H\,] \tag{I.80}$$

という方程式が得られる．これがハイゼンベルク描像における演算子の時間発展方程式で，**ハイゼンベルク方程式** (Heisenberg equation) と呼ばれる．

問題 I.9　上記のハイゼンベルク方程式 (I.80) を (I.79) 式から実際に計算して導け．

問題 I.10　ハミルトニアンは両描像で同じ $H_{\rm H}(t) = H_{\rm S} = H$ であることを示せ．

シュレディンガー描像との関係を用いてこのようにハイゼンベルク方程式を導出すると，その重要性が強くは感じられないかも知れない．しかし，実際には，ハイゼンベルク方程式は，シュレディンガー描像における (I.74) 式と同じ役割を果たす方程式であり，ここから出発するのがハイゼンベルク描像なのである．

(I.79) 式を場の演算子に適用すれば

$$\begin{aligned}\phi_{\rm H}(\boldsymbol{x},t) &= e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\boldsymbol{x})e^{-iH(t-t_0)}\\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\,\Big[\, e^{iH(t-t_0)}a(\boldsymbol{k})e^{-iH(t-t_0)}e^{-ikx} + e^{iH(t-t_0)}a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-iH(t-t_0)}e^{ikx}\,\Big]_{x^0=t_0}\end{aligned}$$

となるので，この描像では生成・消滅演算子も

$$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k}) \ \rightarrow\ a^{(\dagger)}_{\rm H}(\boldsymbol{k},t) = e^{iH(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})e^{-iH(t-t_0)} \tag{I.81}$$

と時間発展していくことがわかる．つまり，この描像では，各時刻毎に生成・消滅演算子が存在し，[♯ I.11] **ある時刻のフォック基底は，その時刻の生成演算子か**

[♯ I.11] 但し，実際には，相互作用の下では「生成・消滅演算子」という簡単な解釈が出来ないことは I.6 節で説明した通りだが．

ら構成されることになる．すなわち，各時刻毎に状態ベクトルの完全系が導入されるのである．

特に，相互作用がない場合には $[H_0,\ a(\boldsymbol{k})]=-k^0a(\boldsymbol{k})$ より

$$\begin{aligned}a_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k},t)&=e^{iH_0(t-t_0)}a(\boldsymbol{k})e^{-iH_0(t-t_0)}\\&=a(\boldsymbol{k})+i(t-t_0)[H_0,\ a(\boldsymbol{k})]+\frac{1}{2}i^2(t-t_0)^2[H_0,\ [H_0,\ a(\boldsymbol{k})]]+\cdots\\&=a(\boldsymbol{k})[1+(-ik^0)(t-t_0)+\frac{1}{2}(-ik^0)^2(t-t_0)^2+\cdots]\\&=a(\boldsymbol{k})e^{-ik^0(t-t_0)}\end{aligned}\tag{I.82}$$

同様に $[H_0,\ a^\dagger(\boldsymbol{k})]=k^0a^\dagger(\boldsymbol{k})$ より（あるいは，上式両辺のエルミート共役より）

$$a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k},t)=e^{iH_0(t-t_0)}a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-iH_0(t-t_0)}=a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik^0(t-t_0)}\tag{I.83}$$

となることに注意すれば

$$\phi_{\mathrm{H}}(x)=\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}[\,a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,]\tag{I.84}$$

となるが，これは，正に (I.29) 式において係数 $a(\boldsymbol{k}), a^*(\boldsymbol{k})$ を演算子 $a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k})$ で置き換えたものである．従って，I.4 で与えた時間を含む演算子は，そこでは量子化の時刻のものであると強調したが，実は，そのまま任意の時間に適用することも出来，それは，時間に依存しない生成・消滅演算子 $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})$ を用いた，ハイゼンベルク描像による自由粒子の記述になる訳である．

さて，ここまでの説明でわかるように，シュレディンガー描像のところで扱った確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i\to\Psi_f)$ をこの描像で求めるために必要になる作業は，運動方程式を $\phi_{\mathrm{H}}(x)|_{x^0=t_0}=\phi_0(\boldsymbol{x})$ という境界条件で解き，それから時刻 $t_{i,f}$ での生成演算子 $a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k},t_{i,f})$ を抜き出して状態 $|\Psi_{i,f}\rangle_{\mathrm{H}}$ を

$$\begin{aligned}|\Psi_i\rangle_{\mathrm{H}}&=a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{p}_1,t_i)a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{p}_2,t_i)\cdots a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{p}_n,t_i)|0\rangle\\|\Psi_f\rangle_{\mathrm{H}}&=a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{q}_1,t_f)a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{q}_2,t_f)\cdots a^\dagger_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{q}_m,t_f)|0\rangle\end{aligned}$$

と構成していくことである．この時，求める確率振幅は

$$\mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\Psi_i \to \Psi_f) = {}_{\mathrm{H}}\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\mathrm{H}} \tag{I.85}$$

で与えられる．これと (I.77) 式で得た $\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(\Psi_i \to \Psi_f)$ の関係を見てみよう．(I.81) 式より

$$a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{k}, t) = e^{iH(t-t_0)} a^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-iH(t-t_0)} \tag{I.86}$$

だから

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle_{\mathrm{H}} &= a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1, t_i) a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_2, t_i) \cdots a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n, t_i)|0\rangle \\ &= e^{iH(t_i-t_0)} a^\dagger(\boldsymbol{p}_1) e^{-iH(t_i-t_0)} \cdots e^{iH(t_i-t_0)} a^\dagger(\boldsymbol{p}_n) e^{-iH(t_i-t_0)}|0\rangle \\ &= e^{iH(t_i-t_0)} a^\dagger(\boldsymbol{p}_1) \cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle \\ &= e^{iH(t_i-t_0)} |\Psi_i\rangle_{\mathrm{S}} \end{aligned} \tag{I.87}$$

同様に，

$$\begin{aligned} |\Psi_f\rangle_{\mathrm{H}} &= a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{q}_1, t_f) a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{q}_2, t_f) \cdots a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{q}_m, t_f)|0\rangle \\ &= e^{iH(t_f-t_0)} |\Psi_f\rangle_{\mathrm{S}} \end{aligned} \tag{I.88}$$

（ここで真空の性質 $|0\rangle_{\mathrm{H}} = |0\rangle_{\mathrm{S}} = |0\rangle$ および $e^{-iHt}|0\rangle = |0\rangle$ を用いた）となる．従って

$${}_{\mathrm{H}}\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f | e^{-iH(t_f-t_0)} e^{iH(t_i-t_0)} | \Psi_i \rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | \Psi_i \rangle_{\mathrm{S}} \tag{I.89}$$

つまり，**どちらの描像で計算しても確率振幅は同じ**という極めて当然の事実

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(\Psi_i \to \Psi_f) = \mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\Psi_i \to \Psi_f)$$

が確認できる．

以上のように，この描像でも，時間発展は形式的には $\phi_{\mathrm{H}}(x) = e^{iH(t-t_0)}\phi_0(\boldsymbol{x})e^{-iH(t-t_0)}$ と表せた訳だが，これを用いても自由状態以外での実際の計算はやは

り不可能に近い．そこで，少なくとも相互作用の寄与が小さい場合に有効な近似になる**摂動**（Perturbation）計算に適した別の描像が，次に導入される．

3．朝永-ディラック（相互作用）描像

時刻 $t=t_0$ において，ハミルトニアンを，相互作用を含まない部分 H_0 と相互作用項 $H_{\rm I}$ に分ける：

$$H = H_0 + H_{\rm I} \tag{I.90}$$

シュレディンガー描像では，状態のみが

$$|\Psi(t)\rangle_{\rm S} = e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

と時間発展し，逆にハイゼンベルク描像では，演算子のみが

$$Q_{\rm H}(t) = e^{iH(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH(t-t_0)}$$

と時間発展するのであるが，ここで両者の中間的な描像を考える．つまり，演算子が

$$Q_{\rm T}(t) = e^{iH_0(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{I.91}$$

に従って変化していく描像である．これは**朝永-ディラック描像**あるいは**相互作用描像**と呼ばれる．これからわかるように，この描像では演算子は自由なハイゼンベルク場と同じ方程式に従う．

問題 I.11　（I.91）式の $Q_{\rm T}(t)$ が自由なハイゼンベルク場の方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}Q_{\rm T}(t) = [\,Q_{\rm T}(t),\ H_0\,]$$

を満たすことを確認せよ．

「演算子の期待値は描像に依らない」という条件から

$$\begin{aligned}{}_{\rm T}\langle\Psi(t)|Q_{\rm T}(t)|\Psi(t)\rangle_{\rm T} &= {}_{\rm S}\langle\Psi(t)|Q(t_0)|\Psi(t)\rangle_{\rm S}\\ &= {}_{\rm T}\langle\Psi(t)|e^{iH_0(t-t_0)}Q(t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm T}\end{aligned}$$

つまり，

$$|\Psi(t)\rangle_{\rm S} = e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm T} \tag{I.92}$$

或いは

$$|\Psi(t)\rangle_{\rm T} = e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle \tag{I.93}$$

が得られる.[♯I.12] 更に，$|\Psi(t_{1,2})\rangle_{\rm T}$ の関係を直接書くことも出来るが，シュレディンガー描像に比べると少々長くなる：

$$|\Psi(t_2)\rangle_{\rm T} = e^{iH_0(t_2-t_0)}e^{-iH(t_2-t_1)}e^{-iH_0(t_1-t_0)}|\Psi(t_1)\rangle_{\rm T} \tag{I.94}$$

また，(I.93) を時間微分すれば

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\rm T} &= -H_0e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} + e^{iH_0(t-t_0)}i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} \\ &= -H_0e^{iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm S} + e^{iH_0(t-t_0)}H|\Psi(t)\rangle_{\rm S} \\ &= e^{iH_0(t-t_0)}H_{\rm I}e^{-iH_0(t-t_0)}|\Psi(t)\rangle_{\rm T} \\ &= H_{\rm I}(t)|\Psi(t)\rangle_{\rm T} \end{aligned} \tag{I.95}$$

となる．ここで，$H_{\rm I}(t)\ (= e^{iH_0(t-t_0)}H_{\rm I}e^{-iH_0(t-t_0)})$ は，この描像での相互作用ハミルトニアンである．この方程式は，シュレディンガー描像での状態の方程式 $i\partial|\Psi(t)\rangle_{\rm S}/\partial t = H|\Psi(t)\rangle_{\rm S}$ に似ているが，$H_{\rm I}(t)$ 自体が t を含むので，形式的にも $|\Psi(t)\rangle_{\rm T} = e^{-iH_{\rm I}(t)(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$ などとは書けないことに注意しよう．

なお，この方程式は，後でわかるように，摂動計算において基本的な役割を果たすことになる．これを，時間変数 t だけを特別扱いすることのない明白に共変的な形に書き直したものは，**朝永-シュヴィンガー方程式**（Tomonaga-Schwinger equation）という名で知られている．

[♯I.12] ここで，一般には H と H_0 は可換ではないので $e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} = e^{i(H_0-H)(t-t_0)} = e^{-iH_{\rm I}(t-t_0)}$ などとやってはいけない．

さて，この描像でも，始状態・終状態は，ハイゼンベルク描像と同様に，時刻 $t_{i,f}$ での $\phi_{\mathrm{T}}(x)$ に含まれる生成演算子 $a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t_{i,f})$ から構成される：

$$\begin{aligned}|\Psi_i\rangle_{\mathrm{T}} &= a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}_1,t_i)a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}_2,t_i)\cdots a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}_n,t_i)|0\rangle\\ |\Psi_f\rangle_{\mathrm{T}} &= a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}_1,t_f)a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}_2,t_f)\cdots a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}_m,t_f)|0\rangle\\ a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t) &= e^{iH_0(t-t_0)}a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-iH_0(t-t_0)}\end{aligned}$$

これより，シュレディンガーおよびハイゼンベルク描像で考えた確率振幅 $\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f)$ をこの描像で扱うと

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{T}}(\Psi_i\to\Psi_f) &= {}_{\mathrm{T}}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{T}}\\ &= {}_{\mathrm{T}}\langle\Psi_f|e^{iH_0(t_f-t_0)}e^{-iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0(t_i-t_0)}|\Psi_i\rangle_{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{I.96}$$

となる．これが $\mathcal{A}_{\mathrm{S,H}}(\Psi_i\to\Psi_f)$ に一致することを示すのは容易である．

問題 I.12　この描像での確率振幅について

$$\mathcal{A}_{\mathrm{T}}(\Psi_i\to\Psi_f) = \mathcal{A}_{\mathrm{S,H}}(\Psi_i\to\Psi_f)$$

が成立することを確認せよ．

$a^{(\dagger)}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t)$ は，シュレディンガー描像での演算子 $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})$ とはどんな関係にあるだろうか．

$$a^{(\dagger)}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t) = e^{iH_0(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{I.97}$$

という関係は（I.86）に似ているが，ここでは時間発展を決めるのは自由ハミルトニアン H_0 である．従って，(I.82)，(I.83）式と同様に

$$a_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t) = a(\boldsymbol{k})e^{-ik^0(t-t_0)},\quad a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t) = a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ik^0(t-t_0)}$$

となるので，結局 $a^\dagger_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t_{i,f})$ と $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ はそれぞれ $e^{\pm ik^0(t_{i,f}-t_0)}$ という因子だけ異なっていることがわかる．しかしながら，これは絶対値が 1 の単なる位相因

子であって，$|_{\mathrm{T}}\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle_{\mathrm{T}}|$ を求める時には消えてしまう．従って，実質的には両者は同じ演算子と考えてよい．また，これより，場の演算子も

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{T}}(x) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t)e^{-ikx} + a_{\mathrm{T}}^{\dagger}(\boldsymbol{k},t)e^{ikx}\right]_{x^0=t_0} \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^{\dagger}(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right] \end{aligned} \tag{I.98}$$

と時間に依存しない生成・消滅演算子で表すことが出来る．実際の計算では，この $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})$ による表現が用いられることになる．

最後に，この描像での相互作用ハミルトニアン $H_{\mathrm{I}}(t)$ について，次の点を強調しておこう：ハミルトニアン密度は，(I.15) 式からもわかるように場の演算子とその空間微分の関数（多項式）だから

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{I}}(t) &= e^{iH_0(t-t_0)}H_{\mathrm{I}}e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3\boldsymbol{x}\, e^{iH_0(t-t_0)}\mathcal{H}_{\mathrm{I}}(\pi(\boldsymbol{x},t_0),\phi(\boldsymbol{x},t_0),\partial_i\phi(\boldsymbol{x},t_0))e^{-iH_0(t-t_0)} \\ &= \int d^3\boldsymbol{x}\, \mathcal{H}_{\mathrm{I}}(\pi_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t),\phi_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t),\partial_i\phi_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t))\end{aligned} \tag{I.99}$$

である．つまり，$H_{\mathrm{I}}(t)$ は自由場のハイゼンベルク演算子だけで表される．これは，この描像の非常に大きな利点と言える．II.6 でまとめる各種の自由場の平面波展開および生成・消滅演算子が，$H_{\mathrm{I}}(t)$ の中ではそのまま使えるのである．

4．三つの描像の比較

ここまで説明してきた三つの描像における，基底ベクトルと系を表現する状態ベクトル（物理的状態ベクトルと呼んでおこう）の時間発展の記述について，読者の直感的な理解の助けになるよう，補足説明も兼ねた比較を行ってみよう．

シュレディンガー描像

この描像では，フォック基底は，時間に依存しない生成演算子から

$$|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle = a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1)\cdots a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_n)|0\rangle$$

と作られる．この「時間発展しない基底」から「時間発展する物理的状態ベクトル」を眺めるのがこの描像である．ところが，$|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle$ は,「基底ベクトル」という特別な名を持ってはいるが，その性質は他の物理的状態ベクトルと同じであるから，これも時間と共に $e^{-iH(t-t_0)}|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle$ と変化していくはずである．すると，基底ベクトルも物理的状態ベクトルも，同じ演算子 $e^{-iH(t-t_0)}$ により時間発展することになり，系の物理的な時間変化は記述できないようにも思われる．

しかしながら，忘れてはならないのは，この描像においては，

- 演算子は時間発展しない

及び，どの時刻においても

- 基底ベクトルは，時間発展しない生成演算子から構成される

ということである．この規約は,「時刻 t_0 で導入された基底 $|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle$ は，時刻 t には $e^{-iH(t-t_0)}|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle$ に変化してしまうが，その時刻には（新たに）基底 $|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle$ が作られる」ことを意味する．従って，運動量 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_n$ の n 粒子からなる物理的な系を記述する状態ベクトルは，$e^{-iH(t-t_0)}$ によって時間発展するが，基底ベクトルとしての $|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_n\rangle$ は，実質的には時間に対して固定されていると見なすことができ，これによって冒頭で述べた「**時間発展しない基底から，時間発展する物理的状態ベクトルを眺める**」という説明が意味を持つようになる．図 I.1 は，これを模式的に表している．

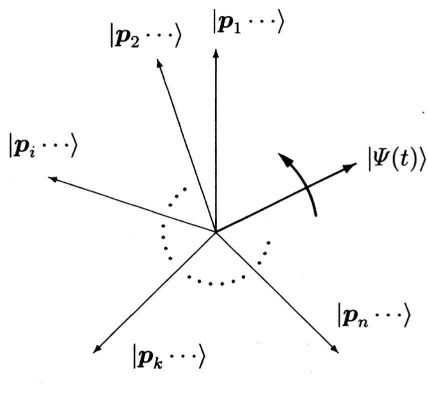


図 I.1

ハイゼンベルク描像

上記と同種の注意は，ハイゼンベルク描像においても必要である．この描像では，時刻 t を出発点とするなら，運動量 $\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n$ を持つ n 粒子系の状態ベクトルは，時刻 t の場の演算子が含む生成演算子 $a_{\mathrm{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{k}, t)$ から

$$|\boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_n, t\rangle = a_{\mathrm{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1, t) \cdots a_{\mathrm{H}}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_n, t)|0\rangle$$

と作られる.[♯ I.13] これは，一見すると時間依存性を持っており,「ハイゼンベルク描像では，状態ベクトルは時間発展しない」という規定に反するように思えるが，そうではない．上記の $|\boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_n, t\rangle$ は，あくまで（任意ではなく）指定された「t」という時刻の演算子 $a^{\dagger}(\boldsymbol{k}, t)$ から構成された状態ベクトルで，時間が $t \to t'$ と発展しても，これはそのまま $|\boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_n, t\rangle$ に留まる．

すると，こんどはシュレディンガー描像の場合とは逆に，基底ベクトルも物理的状態ベクトルも時間変化せず，結果として，系の物理的な時間変化が記述できないという状況に陥るようにも見えてくる．しかし，この描像でも，基底は，常にその時その時の場の演算子（が含む生成演算子）から構成されることは忘れてはならない．従って，時刻 t' における基底ベクトルは

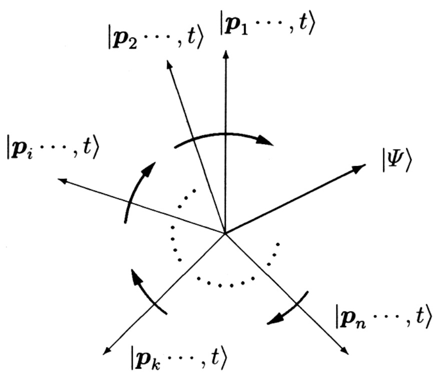


図 I.2

$$|\boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_n, t'\rangle = a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1, t') \cdots a^{\dagger}(\boldsymbol{k}_n, t')|0\rangle$$

である．このことより，この描像でも基底ベクトルだけは，実質的には時間変

♯ I.13「生成・消滅演算子」と言えば，通常は，ハイゼンベルク描像でも，時間発展因子を除いた $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ を指すことが多く，$a_{\mathrm{H}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, t)$ を用いての議論は少々形式的ではある．しかしながら，この描像のイメージ作りには，$a_{\mathrm{H}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{p}, t)$ の利用も有効と思われる．

化すると考えることができ，結果として，「**時間発展する基底から，時間発展しない物理的状態ベクトルを眺める**」ことが可能となる．

朝永-ディラック描像

ここまで説明してくれば，シュレディンガー描像とハイゼンベルク描像の中間的な立場である朝永-ディラック描像については，特に詳述の必要もないだろう．この描像では，時間発展の一部を演算子が（従って，基底ベクトルも）担い，残りを物理的な状態ベクトルが担うのだから，両者ともに時間発展する．つまり，「**時間発展する基底から，時間発展する物理的状態ベクトルを眺める**」のである．

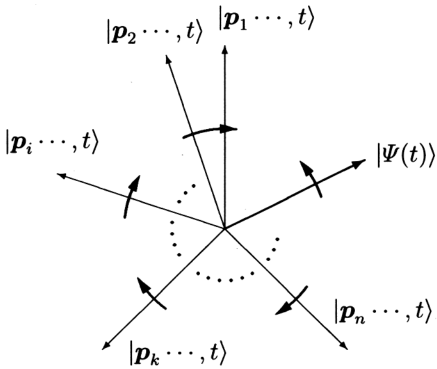


図 I.3

このように，どのベクトルがどのように動くのかは描像毎に異なっても，物理的状態を記述するベクトルと各基底ベクトルの相対的な位置関係は，どの描像でも同じである．物理的状態ベクトル $|\Psi\rangle$ の中に $|\Psi_f\rangle = |\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_n\rangle$ という成分がどれだけ含まれているかという割合が，$|\Psi_i\rangle \to |\Psi_f\rangle$ という遷移の確率を与えることは，それぞれの描像のところでも説明した通りだが，幾何学的なイメージでは，この割合は $|\Psi\rangle$ という "ベクトル" と "座標軸" である各基底ベクトル $|\boldsymbol{p}\cdots\rangle$ の相対的な位置関係で決まるということは明らかだろう．従って，どの描像でも両者の位置関係が同じということは，正に「どの描像において計算しても，状態変化の遷移確率は同じ値になる」という事実を表しているのである．

ま と め

● 場の演算子

$$\phi_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{x}) = \phi_0(\boldsymbol{x}) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx} \right]_{x^0=t_0}$$

$$\phi_{\mathrm{H}}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{k},t)e^{-ikx} + a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{k},t)e^{ikx} \right]_{x^0=t_0}$$

$$a_{\mathrm{H}}^{(\dagger)}(\boldsymbol{k},t) = e^{iH(t-t_0)}a^{(\dagger)}(\boldsymbol{k})e^{-iH(t-t_0)}$$

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{T}}(x) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k},t)e^{-ikx} + a_{\mathrm{T}}^\dagger(\boldsymbol{k},t)e^{ikx} \right]_{x^0=t_0} \\ &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}} \left[a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx} \right]\end{aligned}$$

● 状態 Ψ_i （時刻 t_i） $\longrightarrow$ 状態 Ψ_f （時刻 t_f） という遷移の確率振幅

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(\Psi_i \to \Psi_f) = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle_{\mathrm{S}} = {}_{\mathrm{S}}\langle \Psi_f | e^{-iH(t_f-t_i)} | \Psi_i \rangle_{\mathrm{S}}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{H}}(\Psi_i \to \Psi_f) = {}_{\mathrm{H}}\langle \Psi_f | \Psi_i \rangle_{\mathrm{H}}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{T}}(\Psi_i \to \Psi_f) &= {}_{\mathrm{T}}\langle \Psi_f | \Psi(t_f) \rangle_{\mathrm{T}} \\ &= {}_{\mathrm{T}}\langle \Psi_f | e^{iH_0(t_f-t_0)} e^{-iH(t_f-t_i)} e^{-iH_0(t_i-t_0)} | \Psi_i \rangle_{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

但し，

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{\mathrm{S}} &= a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)\cdots|0\rangle \\ |\Psi\rangle_{\mathrm{H}} &= a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,t)\cdots a_{\mathrm{H}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n,t)\cdots|0\rangle \\ |\Psi\rangle_{\mathrm{T}} &= a_{\mathrm{T}}^\dagger(\boldsymbol{p}_1,t)\cdots a_{\mathrm{T}}^\dagger(\boldsymbol{p}_n,t)\cdots|0\rangle\end{aligned}$$

II. 摂動計算の基礎と場の演算子

II.1 摂動論で計算する量

素粒子現象に関する代表的な問題は，**散乱**（Scattering）または**衝突**（Collision）過程と**束縛状態**（Bound state）である．特に，高エネルギー加速器実験などは前者の典型例であるし，構造を持たない**レプトン**（Lepton）の**崩壊**（Decay）なども前者に含めることが出来る．これは，二つの粒子 P_1, P_2 が衝突し，その結果 n 個の粒子 P'_1, P'_2, $\cdots$, P'_n が生成されるような過程や，一つの粒子 P が n 個の粒子に壊れていくような過程（n 体崩壊）である．これに対して，後者は，**ハドロン**（Hadron）が**クォーク**（Quark）からどのように構成されているか，といった問題であり，また，ハドロンの崩壊もこの束縛問題と無関係ではない．しかしながら，束縛状態を扱う場合には I.6 で述べたような「$t \to \pm\infty$ で相互作用が消える」などという仮定は許されず，結果としてその取り扱いは大変複雑で難しくなる．このような理由により，本書では散乱問題の摂動計算に話を限定することにする．

素粒子実験では，始状態として運動量が確定した粒子群（ビーム）を準備し，反応後（終状態）もやはり運動量が確定した生成粒子を調べる，というのが一般的である．従って，実験結果の解析のためには，運動方程式の解の完全系として運動量の確定状態を取り，それから全ての状態を対応する生成演算子と真空状態 $|0\rangle$ を用いて構成し，それらの時間発展や他の状態への遷移の確率振幅

$$\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f)$$

などを計算するという作業が必要となる．

II.2 場の理論での S 行列

上記の作業過程を，もう少し具体的・定量的に述べるなら次のようになる：素粒子反応の計算は，時刻 $t = t_i = -\infty$ の始状態 Ψ_i（反応前の自由状態）が，相互作用の後に時刻 $t = t_f = +\infty$ でどのような終状態 Ψ_f（反応後の自由状態）に変化するかを調べる形で行われる.[♯II.1] そこで，この節では，出発点となる量子化の時刻 t_0 を $t = t_i$ にとることにする．すると，散乱の始状態 $|P_1(\boldsymbol{p}_1)P_2(\boldsymbol{p}_2)\rangle$ は場 $\phi_0(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}, t_i)$ の生成演算子を用いて $a_1^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a_2^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle$ と，また崩壊の場合の始状態 $|P(\boldsymbol{p})\rangle$ は $a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle$ と構成される．この系が時刻 $t = +\infty$ でどう変化しているかを表すのが**S 行列**（S matrix）である．

はじめに，シュレディンガー描像で考えてみよう（但し，添字 S は略す）．すでに説明したように，この描像では，状態の変化を表す方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle$$

である．これを $|\Psi(t = t_i)\rangle = |\Psi_i\rangle$ という境界条件で解くと，(形式的ながら) 時刻 $t = t_f(= +\infty)$ における状態が

$$|\Psi(t_f)\rangle = e^{-iH(t_f - t_i)}|\Psi_i\rangle \tag{II.1}$$

と得られ，これより $\Psi_i \to \Psi_f$ という遷移の確率振幅が

$$\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle = \langle\Psi_f|e^{-iH(t_f - t_i)}|\Psi_i\rangle \tag{II.2}$$

と与えられる．さて，ここで仮りに相互作用が全くなかったとしてみよう．すると，系が始めに定常状態にあれば，それ以後何の変化も起こらず，$\Psi_i \to \Psi_f$ の確率振幅も単に $\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$ のはずだが，実際に上式で $H = H_0$ とすると $|\Psi_i\rangle$ の

[♯II.1] 始めの時刻が $t = -\infty$ で終りの時刻が $t = +\infty$ と言っても，もちろん数学的な意味での無限大などではない．しかしながら，反応は正に一瞬のうちに起こるので，実質的には非常によい近似でこのように扱うことが出来る．

エネルギーを E_i として

$$\langle\Psi_f|e^{-iH_0(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle = e^{-iE_i(t_f-t_i)}\langle\Psi_f|\Psi_i\rangle$$

となり，$e^{-iE_i(t_f-t_i)}$ という余計な因子が出てしまう．これは $|\langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle|^2$ の計算には効かない単なる位相因子だが，それでも無い方が自然だろう．そこで，この因子を取り除くために，$e^{iH_0(t_f-t_i)}$ という演算子を用いて

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \tag{II.3}$$

と定義すれば，これは系の $|\Psi_i\rangle \to |\Psi(t_f)\rangle$ という時間発展を記述し，かつ $H_{\rm I}=0$ の時には

$$S = 1$$

つまり，余分な位相因子を出さない演算子となる．これが，摂動論的な場の理論で中心的な役割を果たすS行列演算子である．この演算子は

$$SS^\dagger = 1 \tag{II.4}$$

を満たす，つまりユニタリであることはその定義（II.3）より明らかだろう．

このS行列は，“**漸近場**（Asymptotic field）”という概念を用いると，もっとエレガントに定式化できる．これについて簡単に説明しておこう．但し，厳密な議論には立ち入らないことにする．こんどの出発点はハイゼンベルク場 $\phi(x)$ である．時刻 $t\to\pm\infty$ では，束縛状態を考えない限り各粒子はお互い遠く離れ自由な状態になっている訳だから，$\phi(x)$ もある自由なハイゼンベルク場に一致するはずである．そのような自由ハイゼンベルク場は漸近場と呼ばれ，$t\to-\infty$, $t\to+\infty$ に対応してそれぞれ $\phi_{\rm in}(x)$, $\phi_{\rm out}(x)$ と表される：

$$\lim_{t\to-\infty}[\,\phi(x)-\phi_{\rm in}(x)\,]=0, \quad \lim_{t\to+\infty}[\,\phi(x)-\phi_{\rm out}(x)\,]=0 \tag{II.5}$$

この漸近場を，時間因子を含まない生成消滅演算子で表現した (I.84) 式のように

$$\phi_{\rm in}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\,[\,a_{\rm in}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger_{\rm in}(\boldsymbol{p})e^{ipx}\,] \tag{II.6}$$

$$\phi_{\rm out}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\,[\,a_{\rm out}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger_{\rm out}(\boldsymbol{p})e^{ipx}\,] \tag{II.7}$$

と展開し，そこに含まれる生成演算子 $a^{\dagger}_{\mathrm{in,out}}(\boldsymbol{p})$ から構成される状態をそれぞれ $|\Psi,\mathrm{in}\rangle$, $|\Psi,\mathrm{out}\rangle$ のように書く．これを用いて $|\alpha,\mathrm{in}\rangle \to |\beta,\mathrm{out}\rangle$ という変化を記述するＳ行列（の $(\beta\alpha)$ 成分）が

$$S_{\beta\alpha} = \langle\beta,\mathrm{out}|\alpha,\mathrm{in}\rangle \tag{II.8}$$

と，また，Ｓ行列演算子が

$$\langle\beta,\mathrm{out}| = \langle\beta,\mathrm{in}|S \tag{II.9}$$

と定義されるのである．

では，このように導入されたＳ行列演算子は $S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}$ と同じものだろうか？ これを確かめるために，まず $\phi_{\mathrm{in,out}}(x)$ の関係を調べよう．ハイゼンベルク演算子の時間発展は

$$\phi(\boldsymbol{x},t_2) = e^{iH(t_2-t_1)}\phi(\boldsymbol{x},t_1)e^{-iH(t_2-t_1)}$$

に従うが，$\phi_{\mathrm{in,out}}$ の定義より

$$\phi(\boldsymbol{x},t_i) = \phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t_i), \qquad \phi(\boldsymbol{x},t_f) = \phi_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{x},t_f)$$

だから

$$\phi_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{x},t_f) = e^{iH(t_f-t_i)}\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t_i)e^{-iH(t_f-t_i)} \tag{II.10}$$

である．一方，$\phi_{\mathrm{in}}(x)$ という自由ハイゼンベルク場自身の時間発展は e^{-iH_0t} で決まるから

$$\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t_i) = e^{-iH_0(t_f-t_i)}\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t_f)e^{iH_0(t_f-t_i)} \tag{II.11}$$

従って，

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{x},t_f) &= e^{iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0(t_f-t_i)}\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t_f)e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \\ &= [e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1}\phi_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t_f)e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}\end{aligned}$$

より

$$a_{\rm out}(\boldsymbol{p}) = [e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}]^{-1}a_{\rm in}(\boldsymbol{p})e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)} \tag{II.12}$$

が得られる．一方，漸近場によるS行列の定義より

$$\langle\beta,{\rm out}|a_{\rm out}(\boldsymbol{p})|\alpha,{\rm in}\rangle = \langle\beta,{\rm in}|Sa_{\rm out}(\boldsymbol{p})|\alpha,{\rm in}\rangle$$

$$\langle\beta,{\rm out}|a_{\rm out}(\boldsymbol{p})|\alpha,{\rm in}\rangle = \langle\beta\,\boldsymbol{p},{\rm out}|\alpha,{\rm in}\rangle$$

$$= \langle\beta\,\boldsymbol{p},{\rm in}|S|\alpha,{\rm in}\rangle = \langle\beta,{\rm in}|a_{\rm in}(\boldsymbol{p})S|\alpha,{\rm in}\rangle$$

となるが，ここで $|\alpha,{\rm in}\rangle$, $|\beta,{\rm in}\rangle$ は任意の状態だから，結局

$$a_{\rm out}(\boldsymbol{p}) = S^{-1}a_{\rm in}(\boldsymbol{p})S \tag{II.13}$$

従って，(II.12) 式と (II.13) 式を比べれば，確かに漸近場による定義においても

$$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}$$

が成立していることが理解できる.[♯II.2]

なお，$\langle\beta,{\rm in}|S|\alpha,{\rm in}\rangle$ においては $|\alpha,{\rm in}\rangle$, $|\beta,{\rm in}\rangle$ 共に $a_{\rm in}(\boldsymbol{p})$ から構成されているが，ここまでの説明からわかるように，それは実質的にはシュレディンガー描像の演算子 $a(\boldsymbol{p})$ に等しい．また，$a_{\rm out}(\boldsymbol{p})$ も $a_{\rm in}(\boldsymbol{p})$ とは S による変換の分だけの差はあるが，やはりその性質は $a(\boldsymbol{p})$ と同じであることは明らかである．従って，漸近場による議論と言っても特別なことを考える必要はない．但し，(II.3) でS行列演算子を導入した時には，H_0 による時間因子を“手で”抜き出したのに対し，ここでは首尾一貫して漸近場を用いたお蔭で，自然な流れに乗って同じ定義に到達できたことは理解しておきたい．

[♯II.2] 例えば巻末にあげた Greiner-Rheinhardt の教科書に従えば $S = e^{iH_0t_f}e^{-iH(t_f-t_i)}e^{-iH_0t_i}$ となるが，これは $t=0$ が基準（量子化の時刻）として選ばれているからである．この節のように $t=t_i$ を出発点とするなら，I.7.1 で述べた注意に従い全ての時間変数 t（t_i, t_f なども含む）は $t-t_i$ で置き換えられ，その結果本書と同じ式になる．

これ以降は，$\Psi_i \to \Psi(t_f)$ という状態の時間発展および $\Psi_i \to \Psi_f$ という遷移の確率振幅 $\mathcal{A}$ としては，それぞれ（II.1）と（II.2）ではなく，そこから観測には全く影響を与えない位相因子を除いた

$$|\Psi(t_f)\rangle = S|\Psi_i\rangle \;(= e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}|\Psi_i\rangle\,) \tag{II.14}$$

$$\mathcal{A}(\Psi_i \to \Psi_f) = \langle\Psi_f|\Psi(t_f)\rangle \;(= \langle\Psi_f|S|\Psi_i\rangle\,) \tag{II.15}$$

を用いることにする（ここで，$|\Psi_{i,f}\rangle$ は共に $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ から構成される）．勿論，この変更はこれまで考えてきた物理量には何の本質的影響も与えない．

II.3 伝播関数と時間順序積

摂動計算で不可欠な役割を果たすもう一つの量は，**伝播関数**（Propagator）である．これは，スカラー場の場合には $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ と表され，

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) = i\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \tag{II.16}$$

と定義される.[♯II.3] ここで，$\phi(x)$ としては相互作用も含めたハイゼンベルク場が用いられることもあるが，摂動計算には不要なので本書では自由ハイゼンベルク場を採る．また，T はそれに続く時間依存演算子を時間順序に並べ直して掛け合わせることを意味し，その積は**時間順序積**（あるいは**T 積**：Time-ordered product）と呼ばれる．例えば $y^0 > z^0 > x^0$ ならば

$$\mathrm{T}[\,A(x)B(y)C(z)\,] = B(y)C(z)A(x)$$

である．但し，これはボーズ演算子の例であり，フェルミ演算子同士の場合には，順序を 1 回交換する度にマイナス符号を付けるという規則も加わる（この例では 2 回交換があるので，フェルミ演算子でも符号はこのままだが）．

このT積は，階段関数 $\theta(x)$ を用いて

[♯II.3] Δ_{F} の定義には逆符号や i を除く流儀もある．(II.16) の右辺が実際に $x-y$ にしか依存しないことは，$\phi(x)$ と $\phi(y)$ に (I.98) を代入することで確認できる（後述の (II.22) 式参照）．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}[\,A(x)B(y)C(z)\,]\\
&=A(x)B(y)C(z)\theta(x^0-y^0)\theta(y^0-z^0)+A(x)C(z)B(y)\theta(x^0-z^0)\theta(z^0-y^0)\\
&+B(y)A(x)C(z)\theta(y^0-x^0)\theta(x^0-z^0)+B(y)C(z)A(x)\theta(y^0-z^0)\theta(z^0-x^0)\\
&+C(z)A(x)B(y)\theta(z^0-x^0)\theta(x^0-y^0)+C(z)B(y)A(x)\theta(z^0-y^0)\theta(y^0-x^0)
\end{aligned}
$$

と表すことが出来る．階段関数とは，記法のところにも書いたように，$\theta(x>0)=1$, $\theta(x=0)=1/2$, $\theta(x<0)=0$ と定義される関数で，微分するとデルタ関数になるという性質を持つ．後の説明のため，より一般的な式も与えておこう：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}[\,A_1(x_1)A_2(x_2)\cdots A_n(x_n)\,]\\
&\quad=\sum_P A_{p(1)}(x_{p(1)})A_{p(2)}(x_{p(2)})\cdots A_{p(n)}(x_{p(n)})\\
&\quad\times\theta(x^0_{p(1)}-x^0_{p(2)})\theta(x^0_{p(2)}-x^0_{p(3)})\cdots\theta(x^0_{p(n-1)}-x^0_{p(n)})
\end{aligned}
\qquad \text{(II.17)}
$$

ここで $\sum_P$ は（I.48）と同じ和を意味するが，この場合は $\{p(1), p(2), \cdots, p(n)\}$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の並べ替えであり，従って項の総数は $n!$ である．

上で導入した $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ は，$\phi(x)$ がクライン-ゴルドン方程式 $(\Box+m^2)\phi(x)=0$ を満たす場なら，クライン-ゴルドン演算子 $(\Box+m^2)$ のグリーン（Green）関数にもなっている：

$$
(\Box+m^2)\Delta_{\mathrm{F}}(x)=\delta^4(x) \qquad \text{(II.18)}
$$

実際，

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,]&=\partial^\mu[\,\phi(x)\phi(0)\theta(x^0)+\phi(0)\phi(x)\theta(-x^0)\,]\\
&=[\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0)+\phi(x)\phi(0)\partial^\mu\theta(x^0)\\
&+\phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\theta(-x^0)+\phi(0)\phi(x)\partial^\mu\theta(-x^0)
\end{aligned}
$$

において，量子化条件の同時刻交換関係および $d\theta(x)/dx=\delta(x)$ を用いると

$$
\begin{aligned}
&\text{右辺第 2 項}+\text{第 4 項}=\delta_{\mu0}[\,\phi(x)\phi(0)\delta(x^0)-\phi(0)\phi(x)\delta(x^0)\,]\\
&=\delta_{\mu0}\delta(x^0)[\,\phi(x),\ \phi(0)\,]=0
\end{aligned}
$$

となるので

$$\Box\,\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,] = \partial_\mu\partial^\mu\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,]$$
$$= [\Box\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0)$$
$$+\phi(0)[\Box\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0)$$

となり，これより導かれる関係

$$(\Box + m^2)\mathrm{T}[\,\phi(x)\phi(0)\,]$$
$$= [(\Box + m^2)\phi(x)]\phi(0)\theta(x^0) + [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0)$$
$$+\phi(0)[(\Box + m^2)\phi(x)]\theta(-x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0)$$
$$= [\partial^\mu\phi(x)]\phi(0)\partial_\mu\theta(x^0) + \phi(0)[\partial^\mu\phi(x)]\partial_\mu\theta(-x^0)$$
$$= [\partial^0\phi(x)]\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)[\partial^0\phi(x)]\delta(x^0) = \dot\phi(x)\phi(0)\delta(x^0) - \phi(0)\dot\phi(x)\delta(x^0)$$
$$= [\,\pi(x),\ \phi(0)\,]\delta(x^0) = -i\delta^3(\boldsymbol{x})\delta(x^0) = -i\delta^4(x)$$

を真空状態で挟んで（II.18）式が得られる．

さて，摂動計算に頻繁に顔を出すのは，$\Delta_{\mathrm{F}}(x)$ よりもそのフーリエ展開

$$\Delta_{\mathrm{F}}(q) = \int d^4x\, e^{iqx}\Delta_{\mathrm{F}}(x) \tag{II.19}$$

の方である．複素積分により，これは

$$\Delta_{\mathrm{F}}(q) = \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} \tag{II.20}$$

となること，あるいは同じことだが

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{e^{-iqx}}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} \tag{II.21}$$

が成立することを示すことが出来る.[♯II.4] 但し，$\varepsilon(>0)$ は，すべての計算が完了したら 0 と置く微小定数（無限小定数）である.[♯II.5]

♯II.4 ここの 4 元運動量 q には何の制限も付いていないため，一般には $q^2 \neq m^2$ である．このような状態はオフシェル（Off shell）と言われる．一方，直接観測にかかる粒子の運動量は当然 $q^2 = m^2$ を満たさなければならない．そのような状態はオンシェル（On shell）と呼ばれる．

♯II.5 無限小定数なので，これに有限の因子を掛けたり割ったりしたものも同じく ε と書かれる．

これを確かめるには，まず aa, $a^\dagger a$, $a^\dagger a^\dagger$ は真空状態で挟めば皆 0 になるため

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\mathrm{T}\phi(x)\phi(y)|0\rangle \\
&= \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle\theta(x^0-y^0) + \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle\theta(y^0-x^0) \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\, d^3\tilde{\boldsymbol{q}}\Big[\langle 0|a(\boldsymbol{p})a^\dagger(\boldsymbol{q})|0\rangle e^{-i(px-qy)}\theta(x^0-y^0) \\
&\qquad + \langle 0|a(\boldsymbol{q})a^\dagger(\boldsymbol{p})|0\rangle e^{i(px-qy)}\theta(y^0-x^0)\Big] \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{p}}\Big[e^{-ip(x-y)}\theta(x^0-y^0) + e^{ip(x-y)}\theta(y^0-x^0)\Big] \qquad \text{(II.22)}
\end{aligned}
$$

となること，及び

$$\frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2-p^2-i\varepsilon}$$

は，p^0 複素平面上において図 II.1 に示すような点 $p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} - i\varepsilon (\equiv p_1^0)$ と $p^0 = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2} + i\varepsilon (\equiv p_2^0)$ に極を持つことに注意する．

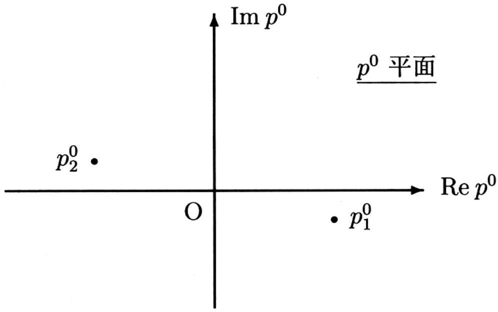


図 II.1

その上で，$e^{-ip(x-y)}$ は $x^0-y^0<0$ の時には $\mathrm{Im}\,p^0>0$ の半径無限大の半円（上半面）で，また $x^0-y^0>0$ の時には $\mathrm{Im}\,p^0<0$ の半径無限大の半円（下半面）で 0 になることを用いて，

$$\int \frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2-p^2-i\varepsilon}$$

の中の p^0 積分路を，図 II.2 のようにそれぞれ上半円一周・下半円一周に拡げ，それに対してコーシー（Cauchy）の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C dz \frac{f(z)}{z-a}$$

（但し，積分路 C は閉曲線でその向きは反時計回り，a は C 内部の点）を適用すればよい．直ちに（II.22）式に一致する結果が得られる．

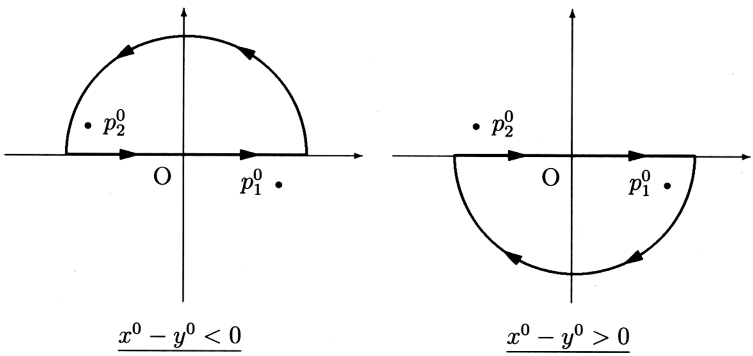


図 II.2

最後に，時間微分項を含むT積についての注意をしておこう．この積の定義にそのまま従えば，例えば $\dot{A}(x)$ と $B(y)$ のT積は

$$\mathrm{T}[\,\dot{A}(x)B(y)\,] = \dot{A}(x)B(y)\theta(x^0 - y^0) + B(y)\dot{A}(x)\theta(y^0 - x^0)$$

となる訳だが，これとは別に

$$\mathrm{T}^*[\,\dot{A}(x)B(y)\,] \equiv \frac{\partial}{\partial x^0}\mathrm{T}[\,A(x)B(y)\,] \tag{II.23}$$

として時間微分はT積の左側に出してしまう定義もある．これは**共変的時間順序積**（Covariant time-ordered product）あるいは T^* 積と呼ばれることもあるが，明らかに時間微分が階段関数に作用する分だけ両者に差が生じる．実は，T^* 積の方が摂動計算には有用であることが後でわかるので，本書では，特に断

わらない限りT積はこの T* 積を意味するものとする．但し，伝播関数の定義にはこの差は無関係であることは明らかだろう．

II.4 朝永-ディラック描像と S 行列

S行列に話を戻そう．$S = e^{iH_0(t_f-t_i)}e^{-iH(t_f-t_i)}$ という形では，具体的な計算をどうやって進めたらいいのかわからない．そこで I.7.3 を見る．朝永-ディラック描像では，状態の時間発展は（I.93）式

$$|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}} = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}|\Psi_0\rangle$$

に従うが，これは正にS行列演算子による時間発展に一致している．つまり，**朝永-ディラック描像は，この演算子にとって自然な描像**だったのである．更に，これは（I.95）式で示したように

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}} = H_{\mathrm{I}}(t)|\Psi(t)\rangle_{\mathrm{T}} \tag{II.24}$$

という微分方程式に書き直せること，そして，この描像での相互作用ハミルトニアン $H_{\mathrm{I}}(t)$ は自由なハイゼンベルク場で表されることも思い出そう．

方程式（II.24）の両辺を，時刻 t_0 から t まで積分すると

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle + (-i)\int_{t_0}^{t} dt'\, H_{\mathrm{I}}(t')|\Psi(t')\rangle \tag{II.25}$$

となる.[♯II.6] 勿論これで解が求まった訳ではないが，相互作用が強くない，つまり H_{I} が微小定数を含む場合には，これを逐次近似法（Successive approximation）で解くことが出来る．まず，第0次近似として $H_{\mathrm{I}} = 0$ と置く．すると，上の (II.25) 式より

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle$$

[♯II.6] これ以降は特に断わらない限り，演算子も状態ベクトルも朝永-ディラック描像のものなので，添字 T は全て省略する．

を得る．これを同じ (II.25) の右辺の $|\Psi(t')\rangle$ に代入して積分変数 t' を t_1 と変え

$$|\Psi(t)\rangle = \Big[\,1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\; H_{\rm I}(t_1)\,\Big]|\Psi(t_0)\rangle$$

これを再び (II.25) の $|\Psi(t')\rangle$ に代入し，改めて積分変数を $t_{1,2}$ とすると

$$|\Psi(t)\rangle = \Big[\,1 + (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\; H_{\rm I}(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\; H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\,\Big]|\Psi(t_0)\rangle$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle = \Big[\,1 &+ (-i)\int_{t_0}^{t} dt_1\; H_{\rm I}(t_1) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\; H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\\ &+ \cdots\cdots\cdots\\ &+(-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\;\cdots\;\int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\; H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\;\cdots\; H_{\rm I}(t_n)\\ &+ \cdots\cdots\cdots\;\Big]|\Psi(t_0)\rangle \end{aligned} \tag{II.26}$$

この中の第 n 次の積分項に注目しよう．各積分の上端･下端からわかるように，積分変数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ の大小関係は，常に $t > t_1 > t_2 > \cdots > t_{n-1} > t_n > t_0$ である．ここで，被積分関数に階段関数の積 $\theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)\theta(t_3-t_4)\cdots\theta(t_{n-1}-t_n)$ を掛けてやれば，積分の値は変えることなく全ての積分の上限を t にそろえることが出来る：

$$\begin{aligned}(-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2\;\cdots\;\int_{t_0}^{t} dt_n\; H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\;\cdots\; H_{\rm I}(t_n)\\ \times\theta(t_1-t_2)\theta(t_2-t_3)\cdots\theta(t_{n-1}-t_n)\end{aligned} \tag{II.27}$$

次に，定積分では積分変数にはどんな文字を使ってもいいのだから，$t_1, t_2, \cdots,$ t_n を $t_{p(1)}, t_{p(2)}, \cdots, t_{p(n)}$ で置き換えよう（$p(1), \cdots, p(n)$ は $1, \cdots, n$ を適当に並べ替えたもの）．このように置き換えても，ここではどの積分の上端・下端も同じ t, t_0 になっているので各積分の順序は自由に交換でき，常に左から t_1 積分，t_2 積分，$\cdots$ としておける：

$$(-i)^n\int_{t_0}^{t} dt_{p(1)} \int_{t_0}^{t} dt_{p(2)}\;\cdots\;\int_{t_0}^{t} dt_{p(n)}\; H_{\rm I}(t_{p(1)})H_{\rm I}(t_{p(2)})\;\cdots\; H_{\rm I}(t_{p(n)})$$

$$
\begin{aligned}
&\times\theta(t_{p(1)}-t_{p(2)})\theta(t_{p(2)}-t_{p(3)})\cdots\theta(t_{p(n-1)}-t_{p(n)}) \\
&=(-i)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\ \cdots\ \int_{t_0}^{t}dt_n\, H_{\mathrm{I}}(t_{p(1)})H_{\mathrm{I}}(t_{p(2)})\ \cdots\ H_{\mathrm{I}}(t_{p(n)}) \\
&\qquad\times\theta(t_{p(1)}-t_{p(2)})\theta(t_{p(2)}-t_{p(3)})\cdots\theta(t_{p(n-1)}-t_{p(n)})
\end{aligned}
$$

この並べ替え（順序交換）P は全部で $n!$ 通りある．その一つ一つに対応する積分はもちろん皆同じ値だから，それらを全て足し合わせ全体を $n!$ で割ったものも，元の積分の値（II.27）に等しい．一方で，この時の足し合わされた被積分関数の全体

$$
\begin{aligned}
&\sum_P H_{\mathrm{I}}(t_{p(1)})H_{\mathrm{I}}(t_{p(2)})\ \cdots\ H_{\mathrm{I}}(t_{p(n)}) \\
&\qquad\times\theta(t_{p(1)}-t_{p(2)})\theta(t_{p(2)}-t_{p(3)})\cdots\theta(t_{p(n-1)}-t_{p(n)})
\end{aligned}
$$

は，(II.17) と見比べれば $\mathrm{T}[\,H_{\mathrm{I}}(t_1)H_{\mathrm{I}}(t_2)\ \cdots\ H_{\mathrm{I}}(t_n)\,]$ そのものであることがわかる.[♯II.7] だから，(II.26) は次のように表せる：

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle = \Big[\,&1+(-i)\int_{t_0}^{t}dt_1\, H_{\mathrm{I}}(t_1)+\frac{(-i)^2}{2}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\,\mathrm{T}[\,H_{\mathrm{I}}(t_1)H_{\mathrm{I}}(t_2)\,] \\
&+\ \cdots\cdots\cdots \\
&+\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\ \cdots\ \int_{t_0}^{t}dt_n\,\mathrm{T}[\,H_{\mathrm{I}}(t_1)H_{\mathrm{I}}(t_2)\ \cdots\ H_{\mathrm{I}}(t_n)\,] \\
&+\ \cdots\cdots\cdots\ \Big]|\Psi(t_0)\rangle
\end{aligned}
\tag{II.28}
$$

さて，ここでは $t=t_i=-\infty$ の初期状態が $t=t_f=+\infty$ でどんな状態に遷移するかを考えるのだから，(II.28) 式で $t_0=-\infty$, $t=+\infty$ と置こう．一方，$|\Psi(+\infty)\rangle$ と $|\Psi(-\infty)\rangle$ は，(II.14) により

$$
|\Psi(+\infty)\rangle = S|\Psi(-\infty)\rangle \tag{II.29}
$$

と関係付けられている．従って，S 行列について

$$
S=1+S^{(1)}+S^{(2)}+\cdots+S^{(n)}+\cdots
$$

♯II.7 仮にフェルミオンが関与していても，通常の相互作用ではフェルミオン数は保存される，つまり $H_{\mathrm{I}}(t)$ の中には $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ が同じ数だけ含まれているので，全体の符号はこのままでよい．

$$
\begin{aligned}
&= 1 + (-i)\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1\, H_{\rm I}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\, {\rm T}[\, H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\,] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2\, \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n\, {\rm T}[\, H_{\rm I}(t_1)H_{\rm I}(t_2)\ \cdots\ H_{\rm I}(t_n)\,] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{II.30}
$$

或いは，ハミルトニアン密度を用いて

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + (-i)\int d^4x_1\, \mathcal{H}_{\rm I}(x_1) + \frac{(-i)^2}{2}\int d^4x_1 \int d^4x_2\, {\rm T}[\, \mathcal{H}_{\rm I}(x_1)\mathcal{H}_{\rm I}(x_2)\,] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots \\
&\quad + \frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1 \int d^4x_2\, \cdots \int d^4x_n\, {\rm T}[\, \mathcal{H}_{\rm I}(x_1)\mathcal{H}_{\rm I}(x_2)\ \cdots\ \mathcal{H}_{\rm I}(x_n)\,] \\
&\quad + \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{II.31}
$$

という**摂動展開**表現を得る．この時，4次元積分の積分領域は全時空である．また，状態 $|\varPsi(-\infty)\rangle$ と $|\varPsi(+\infty)\rangle$ は，共に時間に依存しない生成演算子 $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ から構成されるのだから，$H_{\rm I}(t)$ に含まれる場の演算子も，(I.98) で与えたように $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ による表現

$$
\phi_{\rm T}(x) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\, \left[\, a(\boldsymbol{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\,\right]
$$

を用いるのが便利である．

ここで，相互作用が微分結合（Derivative coupling）を含まない場合を考えてみよう．すると，

$$
\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \mathcal{L}_0(\phi, \partial_\mu\phi) + \mathcal{L}_{\rm I}(\phi), \quad \pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}}
$$

より

$$
\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \dot{\phi}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\rm I} = \mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_{\rm I}
$$

となるから，

$$
\mathcal{H}_{\rm I}(x) = -\mathcal{L}_{\rm I}(x) \tag{II.32}
$$

従って，S行列は

$$S = 1 + i\int d^4x_1\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_1) + \frac{i^2}{2}\int d^4x_1 d^4x_2\,\mathrm{T}[\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_1)\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_2)\,] + \cdots$$
$$\equiv \mathrm{T}\exp[\,i\int d^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\,] \tag{II.33}$$

と書き換えることが出来る．但し，第2の式（exp の式）は，第1の式を形式的にまとめて表したものである．

もし $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ が微分結合を含むなら

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial\dot{\phi}} + \frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{I}}{\partial\dot{\phi}}$$

となり，結果として

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \dot{\phi}\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{I}}{\partial\dot{\phi}} - \mathcal{L}_\mathrm{I}$$

より

$$\mathcal{H}_\mathrm{I} = \dot{\phi}\frac{\partial\mathcal{L}_\mathrm{I}}{\partial\dot{\phi}} - \mathcal{L}_\mathrm{I} \neq -\mathcal{L}_\mathrm{I}$$

となってしまい，上式のようにSを $\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ で表すことは出来ないように思われる．しかし，実際には，相互作用が繰り込み可能（Renormalizable）である時にはT積を T* 積のことと理解しておけば，やはり

$$S = \mathrm{T}\exp[\,i\int d^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\,]$$

が成立することが知られている.♯II.8

積分方程式（II.25）を解き始めるときに相互作用は微小ということを前提としたが，実際に $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ が十分に小さい定数に比例する形をしているなら，摂動展開 $S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots$ の始めの数項の寄与を計算するだけでよい近似が得られると期待できる．つまり摂動計算が有効になるが，この場合は相対論的な

♯II.8 $\mathcal{H}_\mathrm{I} = -\mathcal{L}_\mathrm{I} + [\,差額\,]$ とすると，この「差額」とT積 を T* 積と読み替える時に現れる「差額」とが打ち消し合ってしまうのである．詳しくは例えば「Quantum Field Theory」（C. Itzykson, J-B. Zuber, McGraw-Hill Inc.）の 6-1-4 節参照．

計算なので，**共変摂動論**（Covariant perturbation theory）と呼ばれる．これを具体的に実行するのが本書の中心テーマである．

II.5 断面積と崩壊幅

ここまでの結果を用いれば反応の確率振幅が求められ，これを実験結果と比較することにより，関与した相互作用の強さや性質を調べることが出来る．しかし，すでに述べたように，現実の実験では粒子１・２のビーム同士が，或いは多数の固定標的（粒子２）に粒子１のビームがぶつけられる訳で，反応は１回だけ起こるのではない．従って，ビーム強度なども考慮しないと正確な情報を引き出すことは出来ない．そこで，このような実験条件も含め，もっと厳密に反応の起こる確率を定義しておく必要がある．ここで登場する重要な量が，**散乱（衝突）断面積**（Scattering cross section）と**崩壊幅**（Decay width）である．

断面積の定義

まず始めに，実際に実験で用いられる粒子ビームについて，いくつか注意すべき点を列挙しておく：

(1) ビームは，我々には非常に細く絞り込まれているように見えても，一つ一つの粒子の特徴的サイズに比較すると，無限大と言えるほど拡がっている．

また，

(2) ビーム内では，個々の粒子は互いに十分離れており，その間の相互作用は無視できる．

従って，ビーム同士が離れている時には，どの粒子も自由粒子として記述できる．更に，

(3) 入射する始状態粒子も飛び去る終状態粒子も共に超高速であるため，我々には全過程が一瞬で終わるように見えても，やはり微視的スケール（反応その

ものの時間スケール）で見れば無限の長さとして扱える．

これにより，$t = t_i(= -\infty)$ で自由だった二つの状態が相互作用し，そのあと $t = t_f(= +\infty)$ で再び自由状態になるという過程を記述するＳ行列演算子が適用可能となる．

これで準備は整った．ある**衝突反応の断面積とは，単位体積および単位時間当りの反応回数を，粒子１・２の個数密度と両者の相対速度で割った量**である．従って，両粒子の（ビーム内）個数密度を ρ_1, ρ_2, 両ビームの相対速度の大きさを $v_{\rm rel}$ とし，衝突が，体積 V の空間内で時間 T の間に N 回起こったとすると，その断面積 σ は

$$\sigma = N/(VT\rho_1\rho_2 v_{\rm rel}) \tag{II.34}$$

で与えられる．また，終状態として特別な状態，例えば入射粒子がビーム方向に対して角度 θ と $\theta + d\theta$ の間に散乱される状態，のみに着目する場合には，反応の回数も微小になるはずなので，N, σ をそれぞれ $dN, d\sigma$ と書き改め

$$d\sigma = dN/(VT\rho_1\rho_2 v_{\rm rel}) \tag{II.35}$$

として，この $d\sigma$ 或いは $d\sigma/d\theta$ を（この方向への）**微分断面積**（Differential cross section）と呼ぶ．

断面積は，その名が示すように，また (II.34) 式からもわかる通り，通常の単位系では面積の次元を持ち，具体的には「１個の標的（粒子２）に対し，それを含む面に垂直に，単位面積当り１個の粒子（粒子１）が入射した時に衝突が起こる確率」を表す．実際，時間 T の間に各単位面積に到達するのは，高さが $v_{\rm rel}T$ でその単位面積を底面とする領域の内

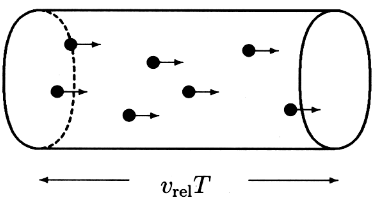


図 II.3

部にいる粒子(1)で，その数は個数密度 $= \rho_1$ より $\rho_1 v_{\rm rel} T$ 個である（図 II.3）．すると，これにより上記確率が σ なら標的粒子(2) 1個当り衝突は $\rho_1 v_{\rm rel} T\sigma$ 回起こることになるが，体積 V の空間内には粒子2も $\rho_2 V$ 個存在するから，全衝突回数は結局 $N = \rho_1\rho_2 v_{\rm rel} VT\sigma$ となり，断面積の定義（II.34）に一致する．

この断面積を，質量・運動量が $(M_1, \boldsymbol{q}_1)\cdots(M_n, \boldsymbol{q}_n)$ の粒子からなる終状態に対して，S行列および実際に測定されるエネルギー・運動量で表現しよう．そのために，まず，$v_{\rm rel}$ を粒子1，2の運動量と質量で書き表そう．一般には $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の関係には何の制限もないが，ここでは実用上特に重要な重心系および粒子2が静止している実験室系に話を限る．すると $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は（反）平行（$\boldsymbol{v}_2 = 0$ の場合も含む）となるので，

$$v_{\rm rel} = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{p}_1/p_1^0 - \boldsymbol{p}_2/p_2^0| = \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}/(p_1^0p_2^0) \tag{II.36}$$

を得る.♯ II.9

問題 II.1　$\boldsymbol{p}_{1,2}$ が平行（または反平行）なら $(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)^2 = \boldsymbol{p}_1^2\boldsymbol{p}_2^2$ が成り立つことに注意して，(II.36) の関係を確かめよ．

次に，始状態の表現に必要な個数密度 ρ について考える．$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle$ は，1粒子波動関数を用いて

$$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle = \int d^3\boldsymbol{x}\,\psi_{\boldsymbol{p}}^*(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x}) = \int d^3\boldsymbol{x}\,|\psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})|^2$$

と表せることからもわかるように，全空間内に存在する粒子の総数を与えるから，$|\boldsymbol{p}\rangle$ で記述される状態においては $\int d^3\boldsymbol{x} = V_{全空間}$ と書けば

$$\rho = \langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle/V_{全空間}$$

である．ここで，本書での規格化 $\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}'\rangle = (2\pi)^3 2p^0\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ を思い出せば，

$$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle = (2\pi)^3 2p^0\delta^3(0) = 2p^0\int d^3\boldsymbol{x}\,e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}}|_{\boldsymbol{p}=0} = 2p^0\int d^3\boldsymbol{x} = 2p^0 V_{全空間}$$

♯ II.9 実は，一般の場合には逆に (II.36) 式の右辺が $v_{\rm rel}$ の「定義」として用いられる．

と変形できるので，最終的に

$$\rho = 2p^0 \tag{II.37}$$

を得る．

他方，終状態の表現のためには一般の多粒子状態について考察する必要がある．まず，本書で採用している規格化方式では，フォック基底の完全性条件は，(I.62) 式のところでも触れたように，

$$\sum_n \int \prod_i^n d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_i |\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n\rangle\langle \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n| = 1 \tag{II.38}$$

で与えられることを確認しよう．但し，ここで左辺は関与する全ての物理的粒子状態に亙る和とその運動量についての積分を表すが，$n = 0$ の場合には 左辺 $= |0\rangle\langle 0|$ であると約束する．また，状態の中に m 個の同種粒子がある場合には，積分において同じ状態を重複して数えないよう対応する項全体を $m!$ で割るものとする．事実，この両辺が，どのような物理的状態ベクトルとの内積に対しても等しくなることを示すのは難しくない．

問題 II.2　(II.38) 式の両辺を $\langle \boldsymbol{k}_1 \cdots \boldsymbol{k}_l|$ と $|\boldsymbol{k}'_1 \cdots \boldsymbol{k}'_m\rangle$ で挟んで等号が成立することを確かめよ．

この完全性条件により，任意の状態 $|\Psi\rangle$ は

$$|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_i |\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n\rangle\langle \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n|\Psi\rangle \tag{II.39}$$

と展開され，そのノルムも

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_n \int \prod_i^n d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_i |\langle \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n|\Psi\rangle|^2 \tag{II.40}$$

と表される．1 粒子状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ の場合は，前述のように $\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle =$ 粒子の総数 だったが，一般の状態においては，$\langle\Psi|\Psi\rangle$ は $|\Psi\rangle$ が記述する状態の総数を与える．それがこの右辺のように表されるということは，その中で各粒子の運動量がそ

れぞれ $\boldsymbol{p}_i$ と $\boldsymbol{p}_i + d^3\boldsymbol{p}_i$ の間に入っているような n 粒子状態の数が

$$\prod_i^n d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_i |\langle \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n | \Psi\rangle|^2$$

であることを意味する．従って，この $|\Psi\rangle$ として始状態 $|\alpha\rangle$ $(= |\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\rangle)$ の時間発展した形 $|\Psi\rangle = S|\alpha\rangle$ をとり，想定している終状態 $|\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_n\rangle$ と組み合わせれば，断面積の定義 (II.35) における反応回数 dN は

$$dN = \prod_{i=1}^n d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i |\langle \beta | S | \alpha\rangle|^2 \tag{II.41}$$

であることがわかる．但し，簡単のため，終状態 $|\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_n\rangle$ を $|\beta\rangle$ と表した．

ここで一つ断わっておこう．S はあらゆる可能な時間発展を記述する演算子なので，当然その中には「無反応」という場合も含まれている．これは S の摂動展開

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots + S^{(n)} + \cdots$$

で言えば，右辺第 1 項の「1」に対応する．従って，本質的にはこれを除いた $S - 1$ が反応を記述する演算子ということになるが，$\alpha \neq \beta$ であれば勿論この 1 は $\langle \beta | S | \alpha\rangle$ の計算には全く寄与しないので，これ以降もこのまま S を用いて話を進めることにする．

さて，どんな反応の前後でも全エネルギー・運動量 P は保存されるから，$\langle \beta | S | \alpha\rangle$ には $\delta^4(P_\beta - P_\alpha)$ という因子が含まれている．それを抜き出して

$$\langle \beta | S | \alpha\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha)\mathcal{M}_{\beta\alpha} \tag{II.42}$$

と表そう．この $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ は**不変散乱振幅**（Invariant scattering amplitude）と呼ばれている．この $\langle \beta | S | \alpha\rangle$ で記述される遷移の舞台は全時空であり，その体積は

$$[VT]_{\text{全時空}} = \int d^3\boldsymbol{x} \int dt = \int d^4x$$

で与えられる．従って，この表現を用いると

$$|\langle \beta | S | \alpha\rangle|^2 = |(2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha)\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2$$

の右辺で $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ を除く部分は

$$(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha)(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha) = (2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha)(2\pi)^4\delta^4(0)$$
$$= (2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha)\int d^4x = [VT]_{\text{全時空}}(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha)$$

となり，

$$dN = [VT]_{\text{全時空}}\prod_{i=1}^{n} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha)|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \tag{II.43}$$

が得られる．うまい具合に $[VT]_{\text{全時空}}$ に比例する形になっているので，単位体積・単位時間当りの反応回数も直ちに得られ，これを，すでに調べた相対速度の大きさ（II.36）や個数密度の表現（II.37）と共に（II.35）式に代入し，最終的に $\alpha \to \beta$ という反応の微分断面積として

$$d\sigma = \prod_{i=1}^{n} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i\frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha) \tag{II.44}$$

を得る．また，これを積分することにより**全断面積**（Total cross section）

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i=1}^{n} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i\frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha) \tag{II.45}$$

が得られる．但し，完全性条件 (II.38) の下で述べた注意は忘れてはならない．すなわち，終状態の中に同種粒子が n_1 個，n_2 個，$\cdots$ ある場合には，この右辺全体を $n_1!n_2!\cdots$ で割ることが必要である．これは，もう少し具体的に言うなら，例えば 1 と 2 が同種である場合，それぞれの運動量が $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}'$ である場合と $\boldsymbol{q}', \boldsymbol{q}$ である場合が原理的に区別不可能（不可弁別性）で全く同じ終状態を与えるため，$\boldsymbol{q}_{1,2}$ 両方について全ての積分領域で積分を実行すると，その同じ状態を 2 度数えてしまうことになるからである．[♯II.10]

実際の実験では，終状態の粒子すべてについて，同時に詳しく調べることは簡単ではない．特に，多数のクォーク（ハドロン）が生成される場合などは，その

[♯II.10] 実は，多くの教科書では，微分断面積の段階ですでに $1/(n_1!n_2!\cdots)$ を含めている．定義の問題だから深く議論してもあまり意味はないが，少なくとも筆者の個人的な見解では，この因子（統計因子：Statistical factor）は含めない方が微分断面積の本来の意味に合致すると思う．

ような分析は不可能なことも少なくない．むしろ，終状態の特定の粒子一つか二つに注目し，それ以外の粒子については全ての状態を含める（積分する）といった分析の方が普通である．例えば，上の式で終状態の粒子 1 が $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_1 + d^3\boldsymbol{q}_1)$ という運動量の区間に生成される断面積は

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_2 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_n \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha) \qquad \text{(II.46)}$$

である．

この式は，$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ といった 2 体反応を重心系で記述する場合には，特に簡単な形になる．実際，$\boldsymbol{q}_2$ 積分は，4 次元デルタ関数の中の空間部分 $\delta^3(\boldsymbol{P}_\beta - \boldsymbol{P}_\alpha)$ のため直ちに完了する：

$$\frac{d\sigma}{d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_1} = \frac{1}{(2\pi)^3 2q_2^0}\frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}(2\pi)^4\delta(P_\beta^0 - P_\alpha^0) \qquad \text{(II.47)}$$

ここで，$P_\beta^0 = q_1^0 + q_2^0 = \sqrt{\boldsymbol{q}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\boldsymbol{q}_2^2 + M_2^2}$，および $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ の中の全ての $\boldsymbol{q}_2$ は，実行した 3 次元デルタ関数積分により $\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{P}_\alpha - \boldsymbol{q}_1 = -\boldsymbol{q}_1$（重心系では $\boldsymbol{P}_\alpha = 0$ だから）と置き換えられている．更に，極座標を用いると $d^3\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_1^2 d|\boldsymbol{q}_1|d\Omega$ となるが，このうち，$|\boldsymbol{q}_1|$ の値は残っているデルタ関数のため固定されてしまうので，$|\boldsymbol{q}_1|$ 積分も簡単に実行できる．すなわち，

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \int_0^{+\infty} d|\boldsymbol{q}_1|\frac{d\sigma}{d|\boldsymbol{q}_1|d\Omega} \\ &= \int_0^{+\infty} |\boldsymbol{q}_1|d|\boldsymbol{q}_1|\delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0)\frac{|\boldsymbol{q}_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0}\frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}\end{aligned}$$

（但し，$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_1^0 + p_2^0)^2$）

において，$|\boldsymbol{q}_1|^2 = (q_1^0)^2 - M_1^2 = (q_2^0)^2 - M_2^2$ から $|\boldsymbol{q}_1|d|\boldsymbol{q}_1| = q_1^0 dq_1^0 = q_2^0 dq_2^0$ が得られることを利用して，積分変数を $|\boldsymbol{q}_1|$ から $q_1^0 + q_2^0$ に変換する．すると上式は

$$\int_0^{+\infty} d(q_1^0 + q_2^0)\frac{q_1^0 q_2^0}{q_1^0 + q_2^0}\delta(\sqrt{s} - q_1^0 - q_2^0)\frac{|\boldsymbol{q}_1|}{64\pi^2 q_1^0 q_2^0}\frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}$$

$$= \frac{|\boldsymbol{q}_1|}{64\pi^2\sqrt{s}} \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}$$

となるので，$\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2} = |p_2^0\boldsymbol{p}_1 - p_1^0\boldsymbol{p}_2| = (p_2^0 + p_1^0)|\boldsymbol{p}_1| = \sqrt{s}|\boldsymbol{p}_1|$ を用いて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\boldsymbol{q}_1|}{64\pi^2 s|\boldsymbol{p}_1|}|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \tag{II.48}$$

に到達するという訳である．ここで $|\boldsymbol{p}_1|, |\boldsymbol{q}_1|$ は $s = (p_1^0 + p_2^0)^2 = (q_1^0 + q_2^0)^2$ などから

$$|\boldsymbol{p}_1| = \sqrt{(p_1^0)^2 - m_1^2}, \qquad p_1^0 = (s + m_1^2 - m_2^2)/(2\sqrt{s})$$
$$|\boldsymbol{q}_1| = \sqrt{(q_1^0)^2 - M_1^2}, \qquad q_1^0 = (s + M_1^2 - M_2^2)/(2\sqrt{s})$$

である．(II.48) 式は，生成粒子の角分布を与える公式であり，素粒子反応の解析においてよく利用される．

崩壊幅の定義

電子（Electron），光子やニュートリノ（Neutrino）などごく少数の例外を除けば全ての素粒子は不安定で，時間の経過と共に，より軽い素粒子群に変化していく．これが崩壊現象である．これも，衝突過程と同じく素粒子相互作用の性質を調べるために頻繁に分析される現象で，断面積に対応して崩壊幅という量で記述される．これは，**1個の粒子の単位時間当りの崩壊確率**を表す．数式的には断面積とほとんど同じように取り扱うことが出来るが，初期状態 $|\alpha\rangle$ としては，通常は崩壊する粒子の静止状態を考える．その質量を m とすると，終状態が n 個の粒子で各運動量が $(\boldsymbol{q}_i,\ \boldsymbol{q}_i + d^3\boldsymbol{q}_i)\,(i = 1 \sim n)$ という区間にあるような崩壊の，全時間・空間における発生回数は（II.43）と同じく

$$dN = [VT]_{\text{全時空}} \prod_{i=1}^{n} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i (2\pi)^4 \delta^4(P_\beta - P_\alpha)|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \tag{II.49}$$

となる．但し，ここでは $P_\alpha = (m, 0, 0, 0)$ である．始状態（1粒子状態）は，全空間に $2P^0_\alpha V_{全空間} (= 2mV_{全空間})$ 個の粒子が存在する状態を表していたから，結局，この場合の**微分崩壊幅**（Differential decay width）は

$$d\Gamma = \frac{dN}{2m[VT]_{全時空}} = \prod_{i=1}^{n} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m}(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha) \qquad \text{(II.50)}$$

ということになる．これも終状態が 2 体の場合には

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{|\boldsymbol{q}|}{32\pi^2 m^2}|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 \qquad \text{(II.51)}$$

と簡単になる．また，$d\Gamma$ を全ての運動量領域に亙って積分し，更に，すべての可能な終状態について足し上げげた量は，**全崩壊幅**（Total decay width）と呼ばれる：

$$\Gamma = \sum_{全終状態} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2}{2m}(2\pi)^4\delta^4(P_\beta - P_\alpha) \qquad \text{(II.52)}$$

単位時間当りの崩壊確率が Γ ということは，この粒子は平均すれば $\tau = 1/\Gamma$ という時間で崩壊することを意味する．つまり，この τ は崩壊粒子の**平均寿命**（Mean lifetime，あるいは略して**寿命**）を与える．一方，終状態を特定の状態 f に限ったもの Γ_f，およびそれと Γ との比 $B_f = \Gamma_f/\Gamma$ は，それぞれ終状態 f への**部分崩壊幅**（Partial decay width）および**分岐比**（Branching ratio）と名付けられている．

全断面積と全崩壊幅

この節を終える前に，少々細かい用語の注意をしておこう．同じ「全」で始まる量でも，全断面積と全崩壊幅ではその使い方には微妙な違いが見られる．全断面積の方は，生成される粒子の種類を固定して，その反応が起こる全確率を表すのに使われることが多い．従って，$|\Psi_A\rangle \to |\Psi_B\rangle$ の全断面積，$|\Psi_A\rangle \to |\Psi_C\rangle$ の全断面積，$\cdots$ というように，散乱の種類毎に全断面積が現れる．一方，全崩壊幅は，すべての終状態について足し合わせた全崩壊確率を指す方が普通である．上でも一応そのように説明しておいた．これは，全崩壊確率の逆数が「平

均寿命」という特別な意味を持つこととも無関係ではないだろう．但し，この使い分けには確立された規則がある訳でもなく，多少面倒でも「過程 A → B の全断面積または全崩壊幅」のように明記すれば間違うことはない．

II.6 場の演算子のまとめ

ここまでは，場の量子論の枠組み及び摂動計算に必要な基本事項を簡潔にまとめるという目的のために，場の演算子としては実スカラー場（Real scalar field）のみに話を限定してきた．しかし，実際の素粒子の多くは 0 でないスピンや電荷を持ち，その記述のためには異なる幾種類かの場が必要になる．具体的には，**電子**，**ミューオン**（Muon），**タウオン**（Tauon），**ニュートリノ**や**クォーク**はスピン 1/2 のフェルミ粒子であって，**ディラックスピノル**（Spinor）場で表される.♯II.11 一方，力の媒介粒子（Intermediate particle）である**光子**（**電磁相互作用**：Electromagnetic interaction），**W ボソン**（**荷電弱相互作用**： Charged weak interaction），**Z ボソン**（**中性弱相互作用**：Neutral weak interaction）や**グルオン**（Gluon，**強相互作用**：Strong interaction）は，スピン 1 のボーズ粒子であり，ベクトル場によって記述される．これらの場の量子化その他の詳細な解説は，本書の目的ではないので他の本格的教科書に譲り，この節では摂動計算のために必要なそれらの場の基本的性質のみをまとめておく.♯II.12

以下に与える場の演算子は，すべて朝永-ディラック描像での表現，つまり自

♯II.11 ミューオン，タウオンは，それぞれ**ミュー粒子**，**タウ粒子**とも呼ばれる．ニュートリノに関しては，その質量も含め興味深い話題が多いが，本書のレベルを超えてしまうので，ここでは他のレプトンと同様に扱う．また，質量も 0 とおく．

♯II.12 ラグランジアンと運動方程式の形は，(メトリックが共通なら）どんなテキストでも同じだが，その他の多くの量は，規格化・記法やその他の習慣により少しずつ異なる．例えば，生成・消滅演算子の規格化には幾つかの流儀があるし，伝播関数も，i を除いて定義されることもある（51 頁の脚注参照）．また，量子論では，しばしばある量の値自体ではなくその絶対値（の 2 乗）のみが意味を持つため，任意の位相因子もよく現れる．但し，どんな基準を採ろうとも，そこで首尾一貫して計算をする限りは，物理的な結果には何の影響も出ないことは勿論である．

由なハイゼンベルク場であり，朝永-ディラック描像における相互作用ハミルトニアン $H_{\mathrm{I}}(t)$ そしてS行列の中で使われるものであることを強調しておこう．なお，生成・消滅演算子の（反）交換関係については0でないもののみを示す．

1．実スカラー場

電荷を持たないスカラー粒子（スピン0粒子）を記述する場である．この場においては，反粒子は粒子自身に等しい．

● 自由場のラグランジアンと運動方程式（クライン-ゴルドン方程式）

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) \tag{II.53}$$

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{II.54}$$

● 伝播関数

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{F}}(q) &\equiv i\int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x)\phi(0)\,|0\rangle \\ &= \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon}\end{aligned} \tag{II.55}$$

● $\phi(x)$ の運動量展開（フーリエ展開）

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0}[\,a(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p})e^{ipx}\,] \tag{II.56}$$

但し，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

● 生成・消滅演算子の交換関係

$$[\,a(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}')\,] = (2\pi)^3 2p^0\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{II.57}$$

2．複素スカラー場

実スカラー場と同じくスピン0の粒子を記述するが，電気的には中性ではない．また，粒子・反粒子の区別もある．

- 自由場のラグランジアンと運動方程式（クライン-ゴルドン方程式）

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) \tag{II.58}$$

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{II.59}$$

- 伝播関数

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathrm{F}}(q) &\equiv i \int d^4x\, e^{iqx} \langle 0 | \mathrm{T}\, \phi(x)\phi^\dagger(0)\, |0\rangle \\ &= \frac{1}{m^2 - q^2 - i\varepsilon} \end{aligned} \tag{II.60}$$

- $\phi(x)$ の運動量展開（フーリエ展開）

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0} [\, a(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\,] \tag{II.61}$$

但し，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

ここで，$a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$, $b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p})$ は，それぞれ粒子，反粒子についての生成・消滅演算子.

- 生成・消滅演算子の交換関係

$$[\, a(\boldsymbol{p}),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}')\,] = [\, b(\boldsymbol{p}),\ b^\dagger(\boldsymbol{p}')\,] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{II.62}$$

3．ディラック場

スピン 1/2 のフェルミ粒子（レプトン，クォーク）を記述する．この場は，ディラックスピノルと呼ばれる 4 成分の量

$$\psi(x) = (\, \psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\,)^t$$

(t: 転置）で表される．また，この量のエルミート共役に右から γ^0 行列（付録 3 参照）を掛けたものは $\bar{\psi}$ と書かれる：

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

この二つの量を γ 行列と組み合わせた

$$\bar{\psi}(x)\psi(x),\quad \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x),\quad \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),\quad \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x),\quad \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$$

（但し，$\sigma_{\mu\nu} \equiv i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/2$）

は，ローレンツ変換の下でそれぞれスカラー，擬スカラー，ベクトル，軸性ベクトル,（2階）テンソルとして振る舞う.

- 自由場のラグランジアンと運動方程式（ディラック方程式）

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma\partial\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \tag{II.63}$$

$$(i\gamma\partial - m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(i\gamma\overleftarrow{\partial} + m) = 0 \tag{II.64}$$

- 伝播関数

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{F}}(q) &\equiv i\int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(x)\bar{\psi}(0)\,|0\rangle \\ &= \frac{1}{m - \not{q} - i\varepsilon}\left(= \frac{m + \not{q}}{m^2 - q^2 - i\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{II.65}$$

- $\psi(x)$ の運動量展開（フーリエ展開）

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{s=\pm 1} [\, c(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx} + d^\dagger(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}\,] \tag{II.66}$$

但し，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

ここで，$c^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},s)$，$d^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},s)$ は，それぞれ粒子，反粒子についての生成・消滅演算子．s は，スピンの z 成分の2倍を表す.

- 生成・消滅演算子の反交換関係

$$\{c(\boldsymbol{p},s), c^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = \{d(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = (2\pi)^3 2p^0\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') \tag{II.67}$$

- スピノル $u(\boldsymbol{p},s), v(\boldsymbol{p},s)$ の性質

$$\begin{aligned} (\not{p} - m)u(\boldsymbol{p},s) &= 0, \qquad \bar{u}(\boldsymbol{p},s)(\not{p} - m) = 0 \\ (\not{p} + m)v(\boldsymbol{p},s) &= 0, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p},s)(\not{p} + m) = 0 \end{aligned} \tag{II.68}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s') = +2m\delta_{ss'}, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s') = -2m\delta_{ss'}$$
$$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s') = 0, \qquad \bar{v}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s') = 0 \tag{II.69}$$

- 射影（Projection）演算子（質量 $\neq 0$ の場合）

$$u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s) = \frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p}+m), \quad v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s) = \frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p}-m) \tag{II.70}$$

但し，s^μ はスピンベクトルで，$s_\mu p^\mu = 0$ を満たす．粒子の静止系では

$$s^\mu = (0, \boldsymbol{s}), \quad \boldsymbol{s}\boldsymbol{s} = 1 \tag{II.71}$$

任意の系での形は，これをローレンツ変換すれば得られるが，特に，運動量 $\boldsymbol{p}$ 方向の偏極の場合は

$$s^\mu = h\Big(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}, \frac{p^0}{m}\boldsymbol{n}\Big) \quad (\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|) \tag{II.72}$$

ここで，$h = \pm 1$ がヘリシティ（Helicity）を表す．スピン和をとると

$$\sum_{s=\pm 1} u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s) = \not{p}+m, \quad \sum_{s=\pm 1} v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s) = \not{p}-m \tag{II.73}$$

- 射影演算子（質量 $=0$ の場合）

$$u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s) = \frac{1+h\gamma_5}{2}\not{p}, \quad v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s) = \frac{1-h\gamma_5}{2}\not{p} \tag{II.74}$$

但し，現実に存在するニュートリノ（u）は左巻き（left-handed: $h=-1$），反ニュートリノ（v）は右巻き（right-handed: $h=+1$）．

- ゴルドン分解（Gordon decomposition）

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_2,s_2) = \frac{1}{2m}\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)[\,(p_1+p_2)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_1-p_2)_\nu\,]u(\boldsymbol{p}_2,s_2) \tag{II.75}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma^\mu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_2,s_2) = \frac{1}{2m}\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)[\,(p_1-p_2)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p_1+p_2)_\nu\,]\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_2,s_2) \tag{II.76}$$

4．実ベクトル場（質量 = 0）

電気的に中性なスピン1の粒子を記述する．具体的には光子とグルオンだが，グルオンは更にカラーという自由度も持つ．この場は4元ベクトルなので，四つの独立な4元ベクトル $\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p}, \lambda = 0 \sim 3)$ で展開される．この四つのベクトルが粒子の偏極を表す．但し，質量が0ということから来る制限などにより，実際の物理的な自由度は2となり，これが二通りの横偏極（Transverse polarization）に対応する．また，実スカラー場と同じく粒子＝反粒子である．この系には「ゲージ不変性（Gauge invariance)」という自由度があり，そのために量子論的取り扱いが複雑になっている．量子化に際しては，まずこの自由度を固定する操作（ゲージ固定： Gauge fixing）が必要で，そのための項がラグランジアンに導入される．

• 自由場のラグランジアン（＋ゲージ固定項：Gauge fixing term）と運動方程式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}\partial^{\mu}A_{\mu}(x)\partial^{\nu}A_{\nu}(x) \tag{II.77}$$

$$(g^{\mu\nu}\Box - \partial^{\mu}\partial^{\nu})A_{\nu}(x) + \frac{1}{\alpha}\partial^{\mu}\partial^{\nu}A_{\nu}(x) = 0 \tag{II.78}$$

$$(\ F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x)\ )$$

• 伝播関数

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(q) &\equiv i\int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|\mathrm{T}\, A^{\mu}(x)A^{\nu}(0)\,|0\rangle \\ &= \frac{1}{q^2+i\varepsilon}\Big[\, g^{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2+i\varepsilon}\,\Big] \end{aligned} \tag{II.79}$$

以後，ファインマン（Feynman）ゲージ（$\alpha = 1$）で考える．この場合の運動方程式は

$$\Box\, A^{\mu}(x) = 0 \tag{II.80}$$

- $A^\mu(x)$ の運動量展開（フーリエ展開）

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_{\lambda=0}^{3} [\, a(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p},\lambda)e^{ipx}\,] \tag{II.81}$$

但し，$p^0 = |\boldsymbol{p}|$.

$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ は偏極ベクトル（Polarization vector）．$\boldsymbol{p}$ の向きに z 軸をとれば

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) &= (1,0,0,0), \quad & \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1) &= (0,1,0,0), \\ \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2) &= (0,0,1,0), \quad & \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3) &= (0,0,0,1) \end{aligned} \tag{II.82}$$

これらは次の条件を満たす：

$$\varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda') = g^{\lambda\lambda'} \tag{II.83}$$

- 生成・消滅演算子の交換関係

$$[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = -(2\pi)^3 2p^0 g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{II.84}$$

また，任意の物理的状態 $|\Psi\rangle$ に対して

$$[\, a(\boldsymbol{p},0) - a(\boldsymbol{p},3)\,]|\Psi\rangle = 0 \tag{II.85}$$

- 物理的成分（横偏極）

横偏極ベクトル $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda=1,2)$ は ♯II.13

$$p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda) = 0, \quad \varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \tag{II.86}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\nu(\boldsymbol{p},\lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu}{pn} - \frac{p^\mu p^\nu}{(pn)^2} \tag{II.87}$$

を満たす.♯II.14 但し，$n^\mu = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) = (1,0,0,0)$.

$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},i) = (0,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},i))$ $(i = 1 \sim 3)$ と表すと $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ は右手系を構成する．そこで，$\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ の場合にもこの関係が保たれるよう

$$\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},1) = -\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},1), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},2) = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2) \tag{II.88}$$

♯II.13 **注意**：スピノル場の場合には「偏極」はスピンの向きを意味するが，ベクトル場では $\boldsymbol{A}(x)$ の向きである．以下に与えるように，横偏極ベクトル（$\boldsymbol{p}$ に垂直）の組み合わせでヘリシティが ±1，つまりスピンが $\boldsymbol{p}$ に（反）平行状態が構成されるが，スピノル場ではこれは縦偏極と呼ばれるので混同しないよう注意が必要である．

♯II.14 実際に物理的過程において $\sum\varepsilon^{\mu *}\varepsilon^\nu$ を考える時には，p^μ が保存カレント j_μ に結合して 0 となってしまうことも多く，その場合には $\sum\varepsilon^{\mu *}\varepsilon^\nu = -g^{\mu\nu}$ と簡単になる．

と決める（$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$ は $\boldsymbol{p}$ の向きだから，明らかに $\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},3) = -\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},3)$）．

• ヘリシティ $h = \pm 1$ の偏極ベクトル

$$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p}, h = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},1) \pm i\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},2)\,\right] \tag{II.89}$$

これに対応する生成・消滅演算子は

$$a(\boldsymbol{p}, h = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,a(\boldsymbol{p},1) \mp ia(\boldsymbol{p},2)\,\right] \tag{II.90}$$

（II.88）のように $\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},i)$ $(i = 1,2)$ を決めたので $\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{p},\pm 1) = -\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},\mp 1)$ となるから

$$\varepsilon_{\mu}(-\boldsymbol{p},h) = \varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},-h) \quad (h = \pm 1) \tag{II.91}$$

但し，以下ではこの関係を用いるが，これには絶対的な意味はない．実際，$\boldsymbol{p}$ の逆転に対して $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{p},2)$ の方が符号を変えると決めてもよいが，その場合には $\varepsilon^{\mu}(-\boldsymbol{p},h) = \varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},-h)$ である．

5．実ベクトル場（質量 $\neq$ 0）

数学的な構造は質量 0 の実ベクトル場に似ているが，質量を持つことにより物理的な自由度が 1 増え，その結果，縦偏極（Longitudinal polarization）も物理的な成分となる．中性弱相互作用を媒介する Z ボソンがこの場で記述される．また，この場においても粒子・反粒子の区別はない．始めから質量項を持つラグランジアンで考えるなら系のゲージ不変性はなくなり，従って，ゲージ固定項は不要のはずだが，実際には「ゲージ不変な理論＋対称性の自発的破れ（Spontaneous symmetry breakdown）」という方法以外に，質量を持つベクトル場の繰り込み可能な理論は作れないことが知られており，ここでもゲージ固定項が導入される．

• 自由場のラグランジアン（＋ゲージ固定項）と運動方程式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_{\mu}(x)A^{\mu}(x) - \frac{1}{2\alpha}\partial^{\mu}A_{\mu}(x)\partial^{\nu}A_{\nu}(x) \tag{II.92}$$

$$(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x) + m^2 A^\mu(x) + \frac{1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu A_\nu(x) = 0 \tag{II.93}$$

- 伝播関数

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(q) &\equiv i\int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|\mathrm{T}\, A^\mu(x)A^\nu(0)\,|0\rangle \\ &= \frac{1}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}\Big[\, g^{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \alpha m^2 + i\varepsilon}\Big] \end{aligned} \tag{II.94}$$

以後，ファインマンゲージ（$\alpha = 1$）の場合を考える．この場合の運動方程式は

$$(\Box + m^2)A^\mu(x) = 0 \tag{II.95}$$

- $A^\mu(x)$ の運動量展開（フーリエ展開）

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{\lambda=0}^{3}[\, a(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p},\lambda)e^{ipx}\,] \tag{II.96}$$

但し，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda)$ は偏極ベクトルで，粒子の静止系（$p^\mu = (m,0,0,0)$）では

$$\begin{aligned} &\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) = (1,0,0,0)\,(= p^\mu/m), \quad && \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},1) = (0,1,0,0), \\ &\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},2) = (0,0,1,0), && \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},3) = (0,0,0,1) \end{aligned} \tag{II.97}$$

任意の系での形はローレンツ変換すれば得られる．但し，$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},0) = p^\mu/m$ の関係は不変．

- 生成・消滅演算子の交換関係

$$[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = -(2\pi)^3 2p^0 g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \tag{II.98}$$

- 物理的成分（スピン＝1 成分）

物理的過程でループを考えない計算では，

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{II.99}$$

という条件（ローレンツ条件）を $A^\mu(x)$ に課すことで，物理的成分（スピン＝1 成分）を取り出すことが出来る．以下はその物理成分について：

$$p_\mu\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda) = 0, \quad \varepsilon^*_\mu(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \tag{II.100}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p}, \lambda)\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{p}, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \tag{II.101}$$

● 横偏極（$h = \pm 1$），縦偏極（$h = 0$）ベクトル

$$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, h = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, 1) \pm i\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, 2)\,] \tag{II.102}$$

$$\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, h = 0) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, 3) = \Big(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}, \frac{p^0}{m}\boldsymbol{n}\Big) \simeq \frac{p^\mu}{m} + O\Big(\frac{m}{p^0}\Big) \tag{II.103}$$

$$(\,\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|\,)$$

それに対応する生成・消滅演算子は

$$a(\boldsymbol{p}, h = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,a(\boldsymbol{p}, 1) \mp ia(\boldsymbol{p}, 2)\,] \tag{II.104}$$

$$a(\boldsymbol{p}, h = 0) = a(\boldsymbol{p}, 3) \tag{II.105}$$

$\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$ に対する偏極ベクトルの性質を（II.88）と同じようにとると

$$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p}, h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p}, -h) \quad (h = \pm 1,\, 0) \tag{II.106}$$

6．複素ベクトル場

電荷・質量を持つスピン１の粒子を記述する．この場合もやはり一見不要なゲージ固定項が必要である．荷電弱相互作用を媒介するWボソンがこの場で表される．

● 自由場のラグランジアン（＋ゲージ固定項）と運動方程式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^\dagger_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A^\dagger_\mu(x)A^\mu(x) - \frac{1}{\alpha}\partial^\mu A^\dagger_\mu(x)\partial^\nu A_\nu(x) \tag{II.107}$$

$$(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu(x) + m^2 A^\mu(x) + \frac{1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu A_\nu(x) = 0 \tag{II.108}$$

• 伝播関数

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(q) \equiv i\int d^4x\, e^{iqx}\langle 0|\mathrm{T}\, A^{\mu}(x)A^{\nu\dagger}(0)\,|0\rangle$$
$$= \frac{1}{q^2-m^2+i\varepsilon}\Big[\, g^{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{q^{\mu}q^{\nu}}{q^2-\alpha m^2+i\varepsilon}\,\Big] \qquad \text{(II.109)}$$

ファインマンゲージ（$\alpha = 1$）では

$$(\Box + m^2)A^{\mu}(x) = 0 \qquad \text{(II.110)}$$

• $A^{\mu}(x)$ の運動量展開（フーリエ展開）

$$A^{\mu}(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2p^0}\sum_{\lambda=0}^{3}\big[\, a(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},\lambda)e^{-ipx} + b^{\dagger}(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p},\lambda)e^{ipx}\,\big] \qquad \text{(II.111)}$$

但し，$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$.

ここで $a^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda)$, $b^{(\dagger)}(\boldsymbol{p},\lambda)$ はそれぞれ粒子，反粒子についての生成・消滅演算子．$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},\lambda)$ は偏極ベクトル で，粒子の静止系（$p^{\mu} = (m,0,0,0)$）では

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},0) = (1,0,0,0)\,(= p^{\mu}/m), \qquad &&\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},1) = (0,1,0,0), \\ &\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},2) = (0,0,1,0), &&\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},3) = (0,0,0,1) \end{aligned} \qquad \text{(II.112)}$$

任意の系での形はローレンツ変換すれば得られる．但し，$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},0) = p^{\mu}/m$ の関係は不変.

• 生成・消滅演算子の交換関係

$$[\, a(\boldsymbol{p},\lambda),\ a^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = [\, b(\boldsymbol{p},\lambda),\ b^{\dagger}(\boldsymbol{p}',\lambda')\,] = -(2\pi)^3 2p^0 g^{\lambda\lambda'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \qquad \text{(II.113)}$$

ここでも以下は $\partial_{\mu}A^{\mu}(x) = 0$ を満たす物理成分について：

$$p_{\mu}\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},\lambda) = 0, \quad \varepsilon_{\mu}^{*}(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \qquad \text{(II.114)}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\varepsilon^{\mu *}(\boldsymbol{p},\lambda)\varepsilon^{\nu}(\boldsymbol{p},\lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{m^2} \qquad \text{(II.115)}$$

• 横偏極（$h = \pm 1$），縦偏極（$h = 0$）ベクトル

$$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p}, h=\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\,\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},1) \pm i\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p},2)\,\big] \qquad \text{(II.116)}$$

$$\varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p}, h=0) = \varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p}, 3) = \Big(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m}, \frac{p^0}{m}\boldsymbol{n}\Big) \simeq \frac{p^{\mu}}{m} + O\Big(\frac{m}{p^0}\Big) \tag{II.117}$$

$$(\,\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|\,)$$

$$\varepsilon_{\mu}(-\boldsymbol{p}, h) = \varepsilon^{\mu}(\boldsymbol{p}, -h) \quad (h = \pm 1,\, 0) \tag{II.118}$$

$h = \pm 1, 0$ に対応する生成・消滅演算子は

$$a(\boldsymbol{p}, h=\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,a(\boldsymbol{p}, 1) \mp ia(\boldsymbol{p}, 2)\,] \tag{II.119}$$

$$a(\boldsymbol{p}, h=0) = a(\boldsymbol{p}, 3) \tag{II.120}$$

$$b(\boldsymbol{p}, h=\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,b(\boldsymbol{p}, 1) \mp ib(\boldsymbol{p}, 2)\,] \tag{II.121}$$

$$b(\boldsymbol{p}, h=0) = b(\boldsymbol{p}, 3) \tag{II.122}$$

♠♠ ちょっと息抜き：　摂動計算は辛いよ　♠♠

筆者が博士課程の院生の頃，ループ（複数の伝播関数から成る閉じた図）も含めた計算に，集中的に取り組んだことがあった．百個近いファインマン図の寄与の評価だった．本書では全く触れていないが，一般にループを含む図からは無限大の発散項が現れるため，それらを「繰り込み」という操作で除去しなければならない．現 金沢大・理学部・教授の青木健一氏といっしょに，毎日深夜まで一つ一つ処理していったのだが，ある一つの発散項がどうしても消えない．数日間あれこれやってみても解決できず,『これは，繰り込み可能性の自発的破れに違いない』などという大発見（？）にも到りかけた（^_^;）．まあ，予想がつくように，その後，一つのグラフの評価の仕方にミスがあることがわかり，一件落着した．我々は，もしかすると発散に救われたのかも知れない．もし，始めから有限な項だけを扱っていたら，間違いに気付かなかったかも知れないんだから．

ともかく，どんな計算でも最終結果を公表する時には神経を使うものである … 中にはそれ程気にしない豪傑もいるが … ．

♣♣♣♣

III. ファインマン則と計算の具体例

III.1 共変摂動論での不変散乱振幅

共変摂動論において不変散乱振幅がどのように導かれるかを具体的に示すため，幾つかの反応を摂動の最低次の近似で扱ってみよう．

1．スカラー粒子散乱

最初の例として，スカラー粒子同士の散乱 $\phi\phi \to \phi\phi$ を取り上げる．相互作用としては，I.6 で触れた $\lambda\phi^4$ 模型

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = -\frac{\lambda}{4!} :\phi^4(x): \tag{III.1}$$

を考える．場の演算子 $\phi(x)$ は（II.56）式で与えられている．

S 行列の摂動展開 $S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \cdots$ において，最低次の近似で寄与するのは

$$S^{(1)} = i\int d^4x\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x :\phi^4(x): \tag{III.2}$$

であり，散乱前の粒子の運動量を $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, 散乱後の運動量を $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$ とすると，その行列要素は

$$\begin{aligned}&\langle\phi(\boldsymbol{p}_3)\phi(\boldsymbol{p}_4)|S^{(1)}|\phi(\boldsymbol{p}_1)\phi(\boldsymbol{p}_2)\rangle\\&= -\frac{i\lambda}{4!}\int d^4x\langle 0|a(\boldsymbol{p}_3)a(\boldsymbol{p}_4) :\phi^4(x): a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle\end{aligned} \tag{III.3}$$

と与えられる．この過程では，始状態と終状態で粒子数は変化していないから，$\phi(x)$ をその生成演算子部分 $\phi^{(c)}(x)$（c = creation）と消滅演算子部分 $\phi^{(a)}(x)$

($a=$ annihilation) に分けて[♯III.1] $:\phi^4(x):$ を展開した時，各項の中で生成・消滅演算子が二つずつ含まれているものだけが効く．四つの $\phi(x)$ の中から二つの生成（あるいは消滅）演算子を抜き出す方法は ${}_4C_2=6$ 通りあるから

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{6i\lambda}{4!}\int d^4x\langle 0|a(\boldsymbol{p}_3)a(\boldsymbol{p}_4)\phi^{(c)}(x)\phi^{(c)}(x)\phi^{(a)}(x)\phi^{(a)}(x)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle\\
&=-\frac{i\lambda}{4}\int d^4x\int\prod_{i=1}^{4}d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i\,e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x}\\
&\qquad\times\langle 0|a(\boldsymbol{p}_3)a(\boldsymbol{p}_4)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_2)a(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle
\end{aligned}
$$

ここで，まず $a(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle$ 部分に注目しよう．これは

$$
\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{q}_3)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle\\
&=a(\boldsymbol{q}_3)[\,a(\boldsymbol{q}_4),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\,]a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle+a(\boldsymbol{q}_3)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a(\boldsymbol{q}_4)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle\\
&=a(\boldsymbol{q}_3)(2\pi)^3 2q_4^0\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)|0\rangle+a(\boldsymbol{q}_3)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)[\,a(\boldsymbol{q}_4),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\,]|0\rangle\\
&\quad+a(\boldsymbol{q}_3)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)a(\boldsymbol{q}_4)|0\rangle
\end{aligned}
$$

と変形していけるが，最後の項は，消滅演算子が直接 $|0\rangle$ に作用するため 0 となる．更に同様の計算を続けると

$$
\begin{aligned}
&=(2\pi)^3 2q_4^0\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1)[\,a(\boldsymbol{q}_3),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\,]|0\rangle\\
&+(2\pi)^3 2q_4^0\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_2)[\,a(\boldsymbol{q}_3),\ a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\,]|0\rangle\\
&=(2\pi)^6 2q_3^0 2q_4^0\Big[\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1)+\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_2)\Big]|0\rangle
\end{aligned}
$$

となり，演算子は姿を消してしまう．すると，残る $a(\boldsymbol{p}_3)a(\boldsymbol{p}_4)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_2)$ も直接 $|0\rangle$ に掛かるようになるので，上と全く同じ操作によって

$$
\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{p}_3)a(\boldsymbol{p}_4)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1)a^\dagger(\boldsymbol{q}_2)|0\rangle\\
&=(2\pi)^6 2q_1^0 2q_2^0\Big[\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_4)\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_3)+\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_3)\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_4)\Big]|0\rangle
\end{aligned}
$$

[♯III.1] 通常は $\phi^{(c)}(x)$ は負の振動数部分ということで $\phi^{(-)}(x)$ と，また $\phi^{(a)}(x)$ は正振動数部分ということで $\phi^{(+)}(x)$ と記される．しかしながら，少なくとも筆者にはどうしても $\phi^{(+)}(x)$ の方が生成部分に見えてしまうので，ここでは (c), (a) を用いることにする．

となり，残った $\langle 0|$ と $|0\rangle$ は直接結合して $\langle 0|0\rangle = 1$ となる．また，$e^{i(q_1+q_2-q_3-q_4)x}$ の x 積分はデルタ関数になるので，結局

$$
\begin{aligned}
&\langle \phi(\boldsymbol{p}_3)\phi(\boldsymbol{p}_4)|S^{(1)}|\phi(\boldsymbol{p}_1)\phi(\boldsymbol{p}_2)\rangle \\
&= -\frac{i\lambda}{4}\int (2\pi)^{12}\prod_{i=1}^{4}(2q_i^0)d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_i(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2-q_3-q_4) \\
&\qquad\qquad \times\Big[\,\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_2)\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_1)+\delta^3(\boldsymbol{q}_3-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_4-\boldsymbol{p}_2)\,\Big] \\
&\qquad\qquad \times\Big[\,\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_4)\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_3)+\delta^3(\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{p}_3)\delta^3(\boldsymbol{q}_2-\boldsymbol{p}_4)\,\Big] \\
&= -i\lambda(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)
\end{aligned}
\tag{III.4}
$$

に達する．これを不変散乱振幅の定義（II.42）と比較してみると，この場合は

$$
\mathcal{M}(\phi\phi\to\phi\phi) = -\lambda \tag{III.5}
$$

であることがわかる．

このように計算を進めれば，対象となる相互作用ラグランジアンから出発して，いつでも必要な不変散乱振幅を導き出すことが出来る．しかし，上の例は，スカラー粒子のみが関与したからまだ簡単だったが，スピノルやベクトルが絡む反応は，以下で見るようにもっと複雑になるので，毎回それを行うのは面倒である．ところが幸いなことに，このような計算を，はじめに必要な分だけ済ませて一定の規則を導いてしまえば，あとは，どのような過程の散乱振幅でも，**ファインマン図**（Feynman diagram）と呼ばれる図形に対応させて求められることが知られており，その規則は**ファインマン則**（Feynman rule）と名付けられている．しかしながら，上記の $\mathcal{M}(\phi\phi\to\phi\phi)$ は見ての通り簡単過ぎて，ファインマン則を説明する最初の例としては適当ではない．そこで，これについて議論するのは保留して，より現実的な反応に進もう．

2．電子・陽電子対消滅

電子と陽電子が衝突・消滅していったん光子になり，更にそれからミューオン対が発生する反応を考えよう．始状態・終状態の粒子それぞれの運動量とス

ピン変数を

$$e(\boldsymbol{p}_1, s_1) + \bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2) \to \mu(\boldsymbol{p}_3, s_3) + \bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)$$

ととる．電磁相互作用ラグランジアンの中で，この過程に寄与する項は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = -e :\bar{\psi}_e(x)\gamma_\alpha\psi_e(x): A^\alpha(x) - e :\bar{\psi}_\mu(x)\gamma_\alpha\psi_\mu(x): A^\alpha(x) \tag{III.6}$$

（e は素電荷：電子電荷 = ミューオン電荷 = $-e$，陽子電荷 = $+e$）である．♯III.2

参考までに付け加えると，この相互作用ラグランジアンはしばしば

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = eJ_\alpha(x)A^\alpha(x) \quad \Big(J_\alpha = -\sum_{\ell=e,\mu} :\bar{\psi}_\ell\gamma_\alpha\psi_\ell: \Big) \tag{III.7}$$

と表され，J_α は**電磁カレント**（Electromagnetic current）と呼ばれる．また，電子やミューオンと光子の相互作用をこの $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ で記述する体系は，**量子電磁力学**（Quantum Electrodynamics 略して QED）と名付けられている．場の量子論では，相互作用の多くは，このようにカレント（厳密に言えばカレント密度）と力の場および結合定数（この場合は e）の積で表現される．

話を本題に戻そう．S 行列の摂動展開の中で，ここでの計算に必要なのは

$$S^{(2)} = \frac{i^2}{2}\int d^4x d^4y \, \mathrm{T}[\,\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(y)\,] \tag{III.8}$$

である．

問題 III.1　何故 $S^{(1)}$ は寄与しないのか理由を考えてみよ．

この $S^{(2)}$ を，始状態・終状態のベクトル

$$|e(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle = c_e^\dagger(\boldsymbol{p}_1, s_1)d_e^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2)|0\rangle \tag{III.9}$$

$$\langle\mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)| = \langle 0|d_\mu(\boldsymbol{p}_4, s_4)c_\mu(\boldsymbol{p}_3, s_3) \tag{III.10}$$

♯III.2 実際の反応では，光子の替りに Z ボソンが結合する中性弱相互作用も関与するが，ここでは，話を簡潔にするため光子の寄与のみを考える．中性弱相互作用の効果については III.2.6 で触れる．

で挟めば

$$
\begin{aligned}
&\langle \mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)|S^{(2)}|e(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\int d^4x d^4y \langle \mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)|\mathrm{T}\,\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(y)\,|e(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle \\
&= -\frac{1}{2}e^2\Big[\int d^4x d^4y \langle \mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)|\mathrm{T}[\,{:}\bar{\psi}_\mu(x)\gamma_\alpha\psi_\mu(x){:}\,A^\alpha(x) \\
&\qquad\qquad \times {:}\bar{\psi}_e(y)\gamma_\beta\psi_e(y){:}\,A^\beta(y)\,]|e(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle \\
&\qquad + \int d^4x d^4y \langle \mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)|\mathrm{T}[\,{:}\bar{\psi}_e(x)\gamma_\alpha\psi_e(x){:}\,A^\alpha(x) \\
&\qquad\qquad \times {:}\bar{\psi}_\mu(y)\gamma_\beta\psi_\mu(y){:}\,A^\beta(y)\,]|e(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle\,\Big]
\end{aligned}
$$

（第２項で積分変数 x と y，ベクトルの脚 α と β を入れ換えて）

$$
\begin{aligned}
&= -e^2\int d^4x d^4y \langle \mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\bar{\mu}(\boldsymbol{p}_4, s_4)|\mathrm{T}[\,{:}\bar{\psi}_\mu(x)\gamma_\alpha\psi_\mu(x){:}\,A^\alpha(x) \\
&\qquad\qquad \times {:}\bar{\psi}_e(y)\gamma_\beta\psi_e(y){:}\,A^\beta(y)\,]|e(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{e}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\rangle
\end{aligned}
$$

ここで，正規積の定義により，ψ_e, ψ_μ いずれに対しても

$$
\begin{aligned}
&{:}\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x){:} \\
&= {:}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_1 d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_2 \sum_{\sigma_1=\pm1}[\,c^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\bar{u}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)e^{ik_1x} + d(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\bar{v}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)e^{-ik_1x}\,] \\
&\qquad \times\gamma_\alpha \sum_{\sigma_2=\pm1}[\,c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)u(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{-ik_2x} + d^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)v(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{ik_2x}\,]{:} \\
&= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_1 d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_2 \sum_{\sigma_1,\sigma_2=\pm1}\Big[\,c^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)\bar{u}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\gamma_\alpha u(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{i(k_1-k_2)x} \\
&\qquad + c^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)d^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)\bar{u}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\gamma_\alpha v(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{i(k_1+k_2)x} \\
&\qquad + d(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)\bar{v}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\gamma_\alpha u(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{-i(k_1+k_2)x} \\
&\qquad - d^\dagger(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)d(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\bar{v}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\gamma_\alpha v(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{-i(k_1-k_2)x}\,\Big]
\end{aligned}
\tag{III.11}
$$

である．

これで計算の準備は整った．$\langle \mu\bar{\mu}|S^{(2)}|e\bar{e}\rangle$ の中で，まず，電子・陽電子の演算子に着目すると，${:}\bar{\psi}_e\gamma\psi_e{:}$ の右側には $c_e^\dagger d_e^\dagger$ があるが左側には何もない，つまり

$:\bar{\psi}_e\gamma\psi_e:$ は直接 $\langle 0|$ に掛かる．だから，(III.11) の各項のうち，$\langle\mu\bar{\mu}|S^{(2)}|e\bar{e}\rangle$ に寄与するのは $d_e(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)c_e(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)$ の項（第３項）のみである．はじめに電子の生成・消滅演算子 c_e, $c_e^\dagger$ を処理しよう．両者の反交換関係は

$$\{c_e(\boldsymbol{k},\sigma), c_e^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)\} = (2\pi)^3 2k^0\delta_{\sigma s_1}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1) \tag{III.12}$$

だから

$$c_e(\boldsymbol{k},\sigma)c_e^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1) = (2\pi)^3 2k^0\delta_{\sigma s_1}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1) - c_e^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)c_e(\boldsymbol{k},\sigma)$$

$\langle\mu\bar{\mu}|S^{(2)}|e\bar{e}\rangle$ の中では，この右側には $|0\rangle$ があるから，結局

$$(2\pi)^3 2k^0\delta_{\sigma s_1}\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1)$$

だけが生き残る．一方，この左側には

$$\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\sum_{\sigma=\pm1} u_e(\boldsymbol{k},\sigma)e^{-iky}$$

があるから，これらもまとめて $u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{-ip_1y}$ となる．まったく同様に，陽電子の項は $\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-ip_2y}$ となり，電子・陽電子の項をまとめると

$$\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{-i(p_1+p_2)y} \tag{III.13}$$

μ, $\bar{\mu}$ の項も計算方法は同じで

$$\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)e^{i(p_3+p_4)x} \tag{III.14}$$

従って，

$$\begin{aligned}\langle\mu\bar{\mu}|S^{(2)}|e\bar{e}\rangle = -e^2\int d^4x d^4y e^{i(p_3+p_4)x}e^{-i(p_1+p_2)y}\langle 0|\mathrm{T}\,A^\alpha(x)A^\beta(y)\,|0\rangle \\ \times\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)\end{aligned} \tag{III.15}$$

最後に，光子の伝播関数は

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \equiv i\langle 0|\mathrm{T}\,A^\mu(x)A^\nu(y)\,|0\rangle \tag{III.16}$$

と定義されたから，

$$\langle\mu\bar{\mu}|S^{(2)}|e\bar{e}\rangle = ie^2\int d^4x d^4y e^{i(p_3+p_4)x}e^{-i(p_1+p_2)y}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(x-y)$$
$$\times\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)$$

ここで $D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(x-y)=\int d^4q\, D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)e^{-iq(x-y)}/(2\pi)^4$ を代入して

$$= ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\int d^4x d^4y e^{i(p_3+p_4-q)x}e^{-i(p_1+p_2-q)y}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)$$
$$\times\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)$$
$$= ie^2\int d^4q(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-q)\delta^4(p_1+p_2-q)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)$$
$$\times\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)$$
$$= ie^2(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(p_1+p_2)$$
$$\times\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1)$$

これより

$$\langle\mu\bar{\mu}|S^{(2)}|e\bar{e}\rangle = i(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4-p_1-p_2)$$
$$\times e^2\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(p_1+p_2)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1) \quad \text{(III.17)}$$

となるので，この反応の不変散乱振幅は

$$\mathcal{M}(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu}) = e^2\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4,s_4)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1,s_1) \quad \text{(III.18)}$$

（$q=p_1+p_2=p_3+p_4$）であることがわかる．

この結果は，次のような規則を認めれば，それから直ちに書き下すことが出来る：

- 始状態のディラック粒子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$u(\boldsymbol{p},s)$
- 始状態の反ディラック粒子（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\bar{v}(\boldsymbol{p},s)$
- 終状態のディラック粒子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\bar{u}(\boldsymbol{p},s)$

- 終状態の反ディラック粒子（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には $v(\boldsymbol{p}, s)$
- 内部（中間状態）を走る光子（4 元運動量 q）には光子伝播関数 $D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)$
- ディラック粒子（電荷 Q）またはその反粒子（電荷 $-Q$）と光子（A^{α}）の結合部には $Q\gamma_{\alpha}$

をそれぞれ対応させる．そして，それらを，反応の進む順序を考えながら全体がスカラーになるように組み合わせる．なお，伝播関数の運動量は，その端点（結合部）での 4 元運動量保存則に従って決められる． ∎

更に，この規則は図形化することが出来る．つまり，始状態のディラック粒子と終状態の反ディラック粒子は，それぞれの光子との結合部（頂点：Vertex）に向かう実線（矢印付），始状態の反ディラック粒子と終状態のディラック粒子はそれらの頂点から離れる実線で，また，内部（中間状態）の光子（伝播関数）は二つの頂点を結ぶ波線で表すことにすれば，この反応は，次のような図で表されることになる：

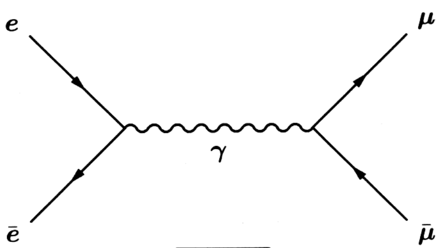


図 III.1

この図は，正に「電子と陽電子が対消滅していったん光子に変わり，それが次に $\mu\bar{\mu}$ 対を生成する」という過程を視覚的に表している．これが (III.18) の振幅に対応するファインマン図である.[♯III.3]

この例だけから一般規則を導くのはもちろん不可能だが，実際には**全ての可能なファインマン図それぞれに，このように不変散乱振幅の各項が一対一対応する**ことが知られている．従って，**幾何学的に可能な図形を描き，それに上述**

♯III.3 この図は，あたかも反応が左から右に進むかのように描かれているが，全体を反時計回りに 90° 回転させ，下から上へ向けて描かれることも多い．

の規則を適用することにより，イメージ的に不変散乱振幅を書き下すことが出来る．この規則が前述のファインマン則という訳である．なお，ファインマン図の中では，始・終状態の粒子・反粒子を表す線は**外線**（External line）と，また中間状態（伝播関数）を表す線は**内線**（Internal line）と総称される．

この議論を参考にして，一時保留しておいた $\lambda\phi^4$ 模型でのスカラー粒子同士の散乱を考えよう．(III.5) を同じように規則化するなら，

- 始状態・終状態のスカラー粒子には　　　　　　1
- 四つのスカラー粒子の結合部（頂点）には　　　$-\lambda$

を対応させるというものになる．また，始状態・終状態や中間状態のスカラー粒子を表す外線・内線には，通常は破線が用いられる．従って，我々が扱ったスカラー粒子同士の散乱のファインマン図は次のようになる：

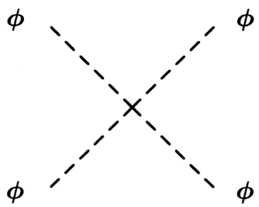


図 III.2

ファインマン図はともかく，不変散乱振幅の構成は実に簡単である．電子・陽電子・光子の話を抜きにして，いきなりこの規則を持ち出しても理解しにくいということで，前節では説明を保留した理由がこれでわかって貰えるだろう．

さて，再びS行列要素の計算の話に戻ろう．ここまでの例でわかるように，S行列要素を求めるためには，一般に

$$\langle 0|a(\boldsymbol{q}_1)\cdots a(\boldsymbol{q}_m)\mathrm{T}[\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_N)\,]a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle \tag{III.19}$$

という形の量を扱わなければならない（簡単のため，関与する場は 1 種類のみとする）．ここで，$\phi(x)$ を生成演算子部分 $\phi^{(c)}(x)$ と消滅演算子部分 $\phi^{(a)}(x)$ に

分けると，上式は 2^N 個の

$$\langle 0|a(\boldsymbol{q}_1)\cdots a(\boldsymbol{q}_m)\mathrm{T}\,[\phi^{(c)}(x_1)\phi^{(a)}(x_2)\phi^{(a)}(x_3)\cdots\phi^{(c)}(x_N)\,]\times a^\dagger(\boldsymbol{p}_1)\cdots a^\dagger(\boldsymbol{p}_n)|0\rangle \tag{III.20}$$

という形の項の和となる．ここでまず行うことは，交換（或いは反交換）関係を使って $\phi^{(a)}$ はどんどん右の方へ，$\phi^{(c)}$ はどんどん左の方へ移動させる，つまり全体を正規積の形

$$\phi^{(c)}\phi^{(c)}\cdots\phi^{(c)}\phi^{(a)}\phi^{(a)}\cdots\phi^{(a)}$$

にもっていくことである．これは，付録2にまとめた**ウィックの定理**（Wick's theorem）を用いればシステマティックに実行できる．次に $\phi^{(a)}$ と $a^\dagger$ との（反）交換関係で更に $\phi^{(a)}$ を右に移動させる．これを $\phi^{(a)}$ が直接 $|0\rangle$ に作用する位置に来るまで続ける．同様に，$\phi^{(c)}$ は $\langle 0|$ に直接掛かるようになるまで左に移動させ続ける．この作業が全ての演算子について終了した時に行列要素が求まるという訳である．

3．電子・電子散乱

こんどは電子・電子散乱を考える．この場合には関係する $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ の項は

$$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = -e:\bar{\psi}_e(x)\gamma_\alpha\psi_e(x): A^\alpha(x) \tag{III.21}$$

のみで，求めるべきS行列要素は

$$\begin{aligned}&\langle e(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|S^{(2)}|e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle\\&=-\frac{1}{2}e^2\int d^4xd^4y\langle e(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|\mathrm{T}[:\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x): A^\alpha(x)\\&\qquad\times:\bar{\psi}(y)\gamma_\beta\psi(y): A^\beta(y)\,]|e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle\end{aligned} \tag{III.22}$$

（関与するディラック場は電子場だけなので，ψ_e の添字 e は落とした）であるが，その中には $\bar{\psi}$ と ψ が二つずつあるので計算には少し注意が必要である．

はじめにT積部分にウィックの定理を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{T}[:\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x):A^\alpha(x):\bar{\psi}(y)\gamma_\beta\psi(y):A^\beta(y)]\\
&=\sum_{i,j,k,l}\mathrm{T}[:\bar{\psi}_i(x)(\gamma_\alpha)_{ij}\psi_j(x)::\bar{\psi}_k(y)(\gamma_\beta)_{kl}\psi_l(y):]\mathrm{T}[A^\alpha(x)A^\beta(y)]\\
&=\sum_{i,j,k,l}\Big[:\bar{\psi}_i(x)\psi_j(x)\bar{\psi}_k(y)\psi_l(y):-\langle 0|\mathrm{T}\,\bar{\psi}_i(x)\psi_l(y)\,|0\rangle:\bar{\psi}_k(y)\psi_j(x):\\
&\qquad -:\bar{\psi}_i(x)\psi_l(y):\langle 0|\mathrm{T}\,\bar{\psi}_k(y)\psi_j(x)\,|0\rangle\\
&\qquad -\langle 0|\mathrm{T}\,\bar{\psi}_i(x)\psi_l(y)\,|0\rangle\langle 0|\mathrm{T}\,\bar{\psi}_k(y)\psi_j(x)\,|0\rangle\Big]\\
&\qquad\qquad \times(\gamma_\alpha)_{ij}(\gamma_\beta)_{kl}\mathrm{T}[A^\alpha(x)A^\beta(y)]
\end{aligned}
\tag{III.23}
$$

となる．これを $\langle ee|$ と $|ee\rangle$ で挟むと $:\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi:$ を含む第１項のみが生き残ることは明らかだから，評価すべき項は

$$
\begin{aligned}
&\langle ee|S^{(2)}|ee\rangle\\
&=-\frac{1}{2}e^2\sum_{i,j,k,l}\int d^4x d^4y(\gamma_\alpha)_{ij}(\gamma_\beta)_{kl}\langle 0|\mathrm{T}\,A^\alpha(x)A^\beta(y)\,|0\rangle\\
&\quad\times\langle e(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|:\bar{\psi}_i(x)\psi_j(x)\bar{\psi}_k(y)\psi_l(y):|e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle\\
&=-\frac{1}{2}e^2\int d^4x d^4y\langle 0|\mathrm{T}\,A^\alpha(x)A^\beta(y)\,|0\rangle\\
&\quad\times\langle e(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|:\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma_\beta\psi(y):|e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle
\end{aligned}
\tag{III.24}
$$

ここでは陽電子は無関係なので，$\bar{\psi},\psi$ の中で必要なのは $c^\dagger, c$ の項だけである：

$$
\begin{aligned}
&:\bar{\psi}(x)\gamma_\alpha\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma_\beta\psi(y):\\
&\to-\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_1 d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_2 d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_3 d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_4\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4=\pm1}e^{i(k_1-k_2)x}e^{i(k_3-k_4)y}\\
&\qquad\times\bar{u}(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)\gamma_\alpha u(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)\bar{u}(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)\gamma_\beta u(\boldsymbol{k}_4,\sigma_4)\\
&\qquad\qquad\times c^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)c^\dagger(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3)c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)c(\boldsymbol{k}_4,\sigma_4)
\end{aligned}
$$

まず $c(\boldsymbol{k},\sigma)$ の処理から始めよう：

$$
c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)c(\boldsymbol{k}_4,\sigma_4)|e(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)c(\boldsymbol{k}_4,\sigma_4)c^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \\
&= c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)[\,(2\pi)^3 2k_4^0\,\delta_{\sigma_4 s_1}\delta^3(\boldsymbol{k}_4-\boldsymbol{p}_1) - c^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)c(\boldsymbol{k}_4,\sigma_4)\,]c^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \\
&= (2\pi)^3 2k_4^0\,\delta_{\sigma_4 s_1}\delta^3(\boldsymbol{k}_4-\boldsymbol{p}_1)c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \\
&\qquad\qquad -c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)c^\dagger(\boldsymbol{p}_1,s_1)c(\boldsymbol{k}_4,\sigma_4)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \\
&= (2\pi)^6(2k_2^0)(2k_4^0)[\,\delta_{\sigma_4 s_1}\delta_{\sigma_2 s_2}\delta^3(\boldsymbol{k}_4-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\qquad -\delta_{\sigma_2 s_1}\delta_{\sigma_4 s_2}\delta^3(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{k}_4-\boldsymbol{p}_2)\,]|0\rangle
\end{aligned}
$$

まったく同様に $c^\dagger(\boldsymbol{k},\sigma)$ については

$$
\begin{aligned}
&\langle e(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|c^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)c^\dagger(\boldsymbol{k}_3,\sigma_3) \\
&\quad = (2\pi)^6(2k_1^0)(2k_3^0)[\,\delta_{\sigma_1 s_3}\delta_{\sigma_3 s_4}\delta^3(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{p}_3)\delta^3(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{p}_4) \\
&\qquad\qquad -\delta_{\sigma_3 s_3}\delta_{\sigma_1 s_4}\delta^3(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{p}_3)\delta^3(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{p}_4)\,]\langle 0|
\end{aligned}
$$

後は，電子・陽電子消滅反応の場合と同じ計算をすればよい．結果は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(ee\to ee) &= e^2\bar{u}(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\alpha u(\boldsymbol{p}_1,s_1)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\gamma_\beta u(\boldsymbol{p}_2,s_2) \\
&\quad - e^2\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\gamma_\alpha u(\boldsymbol{p}_1,s_1)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q')\bar{u}(\boldsymbol{p}_3,s_3)\gamma_\beta u(\boldsymbol{p}_2,s_2) \qquad \text{(III.25)}
\end{aligned}
$$

（$q=p_1-p_3$, $q'=p_3-p_2$）となる．これが電子・電子散乱の不変散乱振幅であり，第1項，第2項はそれぞれ次の図の (1)，(2) に対応している（第2項の符号に注意！）．二つの図を同時に考慮しなければならないということは，両者が全く識別できないこと，つまり，電子同士の不可弁別性を表している．

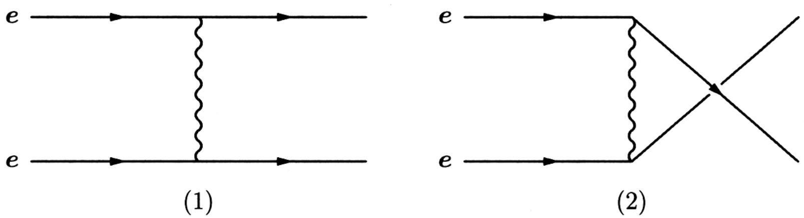


図 III.3

ここでファインマン則の追加：

- ディラック粒子が交叉する図に対応する振幅には（相対符号）-1 が掛かる

問題 III.2　電子・ミューオン散乱の不変散乱振幅を求めよ．

問題 III.3　電子・電子散乱の不変散乱振幅を e^4 の項まで含めて求めようとすると，(III.6) 式の右辺第２項のミューオン・光子結合など電子以外の粒子の相互作用項も寄与するようになる．これは何故か考えてみよ．

なお，ここで調べた電子同士の弾性散乱は，**メラー散乱**（Mϕller scattering）という名で呼ばれることも多い．

４．電子・光子散乱

始・終状態（外線）にベクトル粒子が現れる例としては，電子・光子散乱（コンプトン散乱：Compton scattering）がよく知られている．関与する相互作用は電子・電子散乱の場合と同じであり，やはり $S^{(2)}$ が評価対象となる．

$$\begin{aligned}
&\langle\gamma(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|S^{(2)}|\gamma(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle\\
&=-\frac{1}{2}e^2\int d^4xd^4y\langle\gamma(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|\mathrm{T}[\,:\bar{\psi}_e(x)\gamma_\alpha\psi_e(x):\,A^\alpha(x)\\
&\qquad\times\,:\bar{\psi}_e(y)\gamma_\beta\psi_e(y):\,A^\beta(y)\,]|\gamma(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle
\end{aligned}\tag{III.26}$$

電子と光子の演算子は独立に扱えるので，まず光子部分を計算しよう．そこは，ウィックの定理により

$$\mathrm{T}[\,A^\alpha(x)A^\beta(y)\,]=\,:A^\alpha(x)A^\beta(y):\,+\langle 0|\mathrm{T}\,A^\alpha(x)A^\beta(y)\,|0\rangle\tag{III.27}$$

と書き直せるが，この散乱では始・終状態に光子が存在するので，右辺第１項（正規積）のみが効く．更に，その正規積の中で光子演算子を運動量展開すると四つの項が現れるが，反応の前後で光子数は変化しないから，

$$\begin{aligned}
\int d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_1d^3\tilde{\boldsymbol{q}}_2\sum_{\lambda_1,\lambda_2=1}^{2}\Big[&a^\dagger(\boldsymbol{q}_1,\lambda_1)a(\boldsymbol{q}_2,\lambda_2)\varepsilon^{\alpha*}(\boldsymbol{q}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\beta}(\boldsymbol{q}_2,\lambda_2)e^{i(q_1x-q_2y)}\\
&+a^\dagger(\boldsymbol{q}_2,\lambda_2)a(\boldsymbol{q}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\alpha}(\boldsymbol{q}_1,\lambda_1)\varepsilon^{\beta*}(\boldsymbol{q}_2,\lambda_2)e^{-i(q_1x-q_2y)}\Big]
\end{aligned}$$

だけを考えればよい.♯III.4 従って，計算すべき行列要素は

$$\langle 0|a(\boldsymbol{p}_3, s_3)a^\dagger(\boldsymbol{q}_1, \lambda_1)a(\boldsymbol{q}_2, \lambda_2)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1, s_1)|0\rangle \tag{III.28}$$

$$\langle 0|a(\boldsymbol{p}_3, s_3)a^\dagger(\boldsymbol{q}_2, \lambda_2)a(\boldsymbol{q}_1, \lambda_1)a^\dagger(\boldsymbol{p}_1, s_1)|0\rangle \tag{III.29}$$

の二つである．これは直ちに計算でき，

$$\text{第 1 項} = (2\pi)^6\, 2q_1^0\, 2q_2^0\, \delta_{\lambda_1 s_3}\delta_{\lambda_2 s_1}\delta^3(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{p}_3)\delta^3(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}_1)$$

$$\text{第 2 項} = (2\pi)^6\, 2q_1^0\, 2q_2^0\, \delta_{\lambda_1 s_1}\delta_{\lambda_2 s_3}\delta^3(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{p}_1)\delta^3(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{p}_3)$$

となる．これに偏極ベクトルを掛けたものを $\boldsymbol{q}_{1,2}$ 積分して

$$\varepsilon^{\alpha *}(\boldsymbol{p}_3, s_3)\varepsilon^{\beta}(\boldsymbol{p}_1, s_1)e^{i(p_3 x - p_1 y)} + \varepsilon^{\alpha}(\boldsymbol{p}_1, s_1)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{p}_3, s_3)e^{-i(p_1 x - p_3 y)} \tag{III.30}$$

が得られる．

次は電子項の寄与の評価である．具体的にスピノルの成分まで書くと

$$\sum_{i,j,k,l} \langle 0|c(\boldsymbol{p}_4, s_4)\mathrm{T}[\,:\bar{\psi}_i(x)(\gamma_\alpha)_{ij}\psi_j(x)::\bar{\psi}_k(y)(\gamma_\beta)_{kl}\psi_l(y):]c^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2)|0\rangle$$

（ここでも ψ_e の添字 e は省略した）だが，この中のT積をウィックの定理により展開した項の中では

$$(\gamma_\alpha)_{ij}(\gamma_\beta)_{kl}\Big[:\bar{\psi}_i(x)\psi_l(y):\langle 0|\mathrm{T}\;\psi_j(x)\bar{\psi}_k(y)\;|0\rangle \\ + :\bar{\psi}_k(y)\psi_j(x):\langle 0|\mathrm{T}\;\psi_l(y)\bar{\psi}_i(x)\;|0\rangle\Big]$$

のみが寄与する．従って，求めなければならない行列要素は

$$\langle 0|c(\boldsymbol{p}_4, s_4) :\bar{\psi}_i(x)\psi_l(y): c^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2)|0\rangle \tag{III.31}$$

$$\langle 0|c(\boldsymbol{p}_4, s_4) :\bar{\psi}_k(y)\psi_j(x): c^\dagger(\boldsymbol{p}_2, s_2)|0\rangle \tag{III.32}$$

♯III.4 外線の光子は，偏極ベクトルの物理的成分（$\lambda_{1,2} = 1, 2$）のみを持つことに注意.

ということになる.

$$
\text{第 1 項} = \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_1 d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_2 \langle 0|c(\boldsymbol{p}_4, s_4)c^\dagger(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)c(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)c^\dagger(\boldsymbol{p}_2,s_2)|0\rangle \times \bar{u}_i(\boldsymbol{k}_1,\sigma_1)e^{ik_1x}u_l(\boldsymbol{k}_2,\sigma_2)e^{-ik_2y}
$$
$$
= \bar{u}_i(\boldsymbol{p}_4,s_4)u_l(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(p_4x-p_2y)}
$$

まったく同様に

$$
\text{第 2 項} = \bar{u}_k(\boldsymbol{p}_4,s_4)u_j(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(p_2x-p_4y)}
$$

従って，全体は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}e^2\sum_{i,j,k,l}\int d^4x d^4y (\gamma_\alpha)_{ij}(\gamma_\beta)_{kl} \\
&\quad\times\Big[\bar{u}_i(\boldsymbol{p}_4,s_4)u_l(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(p_4x-p_2y)}\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle_{jk} \\
&\qquad+\ \bar{u}_k(\boldsymbol{p}_4,s_4)u_j(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(p_2x-p_4y)}\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(y)\bar{\psi}(x)\,|0\rangle_{li}\Big] \\
&\quad\times\big[\varepsilon^{\alpha *}(\boldsymbol{p}_3,s_3)\varepsilon^{\beta}(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{i(p_3x-p_1y)}+\varepsilon^{\alpha}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{p}_3,s_3)e^{-i(p_1x-p_3y)}\big] \\
&=-\frac{1}{2}e^2\int d^4xd^4y\Big[\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\gamma_\alpha\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(x)\bar{\psi}(y)\,|0\rangle\gamma_\beta u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(p_4x-p_2y)} \\
&\qquad+\ \bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\gamma_\beta\langle 0|\mathrm{T}\,\psi(y)\bar{\psi}(x)\,|0\rangle\gamma_\alpha u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(p_2x-p_4y)}\Big] \\
&\quad\times\big[\varepsilon^{\alpha *}(\boldsymbol{p}_3,s_3)\varepsilon^{\beta}(\boldsymbol{p}_1,s_1)e^{i(p_3x-p_1y)}+\varepsilon^{\alpha}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{p}_3,s_3)e^{-i(p_1x-p_3y)}\big] \\
&=\frac{i}{2}e^2\int d^4xd^4y \\
&\times\Big[\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)S_{\mathrm{F}}(x-y)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(p_3x-p_1y)}e^{i(p_4x-p_2y)} \\
&+\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)S_{\mathrm{F}}(x-y)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(p_1x-p_3y)}e^{i(p_4x-p_2y)} \\
&+\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)S_{\mathrm{F}}(y-x)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(p_3x-p_1y)}e^{-i(p_2x-p_4y)} \\
&+\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)S_{\mathrm{F}}(y-x)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(p_1x-p_3y)}e^{-i(p_2x-p_4y)}\Big]
\end{aligned}
$$

$S_{\mathrm{F}}(x-y) = \int d^4q\, S_{\mathrm{F}}(q)e^{-iq(x-y)}/(2\pi)^4$ を用いると

$$
= \frac{ie^2}{2(2\pi)^4}\int d^4xd^4y\int d^4q
$$

$$\times\Big[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)S_{\rm F}(q)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(q-p_3-p_4)x}e^{i(q-p_1-p_2)y}$$
$$+\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)S_{\rm F}(q)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{-i(q+p_1-p_4)x}e^{i(q+p_3-p_2)y}$$
$$+\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)S_{\rm F}(q)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(q+p_3-p_2)x}e^{-i(q+p_1-p_4)y}$$
$$+\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)S_{\rm F}(q)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)e^{i(q-p_1-p_2)x}e^{-i(q-p_3-p_4)y}\,\Big]$$

但し，$\not{\varepsilon}\equiv\varepsilon^\mu\gamma_\mu$ という記法を用いた（付録 III 参照）．ここで，x および y 積分を行うと各項にデルタ関数が二つずつ現れるが，そのうちの一つは q 積分で消えてしまい，最後に次のような結果に達する：

$$\langle\gamma(\boldsymbol{p}_3,s_3)e(\boldsymbol{p}_4,s_4)|S^{(2)}|\gamma(\boldsymbol{p}_1,s_1)e(\boldsymbol{p}_2,s_2)\rangle$$
$$=i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$
$$\times\, e^2\,[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)S_{\rm F}(p_2+p_1)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)$$
$$+\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)S_{\rm F}(p_2-p_3)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]$$

従って，この場合の不変散乱振幅は

$$\mathcal{M}(\gamma e\to\gamma e)=e^2\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)S_{\rm F}(q)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)$$
$$+\,e^2\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_4,s_4)\not{\varepsilon}(\boldsymbol{p}_1,s_1)S_{\rm F}(q')\not{\varepsilon}^*(\boldsymbol{p}_3,s_3)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\qquad\text{(III.33)}$$

（$q=p_1+p_2,\,q'=p_2-p_3$）である．これから，外線に光子がある場合には振幅に偏極ベクトル ε_α（始状態），ε_α^*（終状態）が，また中間状態に電子（一般にはディラック粒子）があると，その伝播関数 $S_{\rm F}$ がそれぞれ現れることがわかる．

ファインマン則の追加：

- 始状態の光子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{p},s)$
- 終状態の光子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\varepsilon_\alpha^*(\boldsymbol{p},s)$
- 内部を走るディラック粒子（4 元運動量 q）には伝播関数　$S_{\rm F}(q)_{ij}$

　が対応する（ここで q の向きは $j\to i$ である）．

また，始・終状態の光子はその伝播関数と同じく波線で，中間状態のディラック粒子（伝播関数）は始・終状態と同じく矢印付きの実線で表す．但し，矢印の向きは $S_{\mathrm{F}}(q)_{ij}$ の引数 q と同じく $j \to i$ である．従って，振幅（III.33）の第1・2項は，それぞれ次のファインマン図 (1)，(2) で表される．

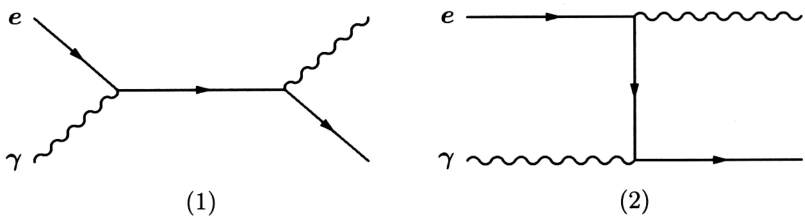


図 III.4

5．反ディラック粒子を含む反応

ディラック粒子（一般にはフェルミ粒子）はフェルミ統計に従うため，一見簡単そうな反応過程の取り扱いでも，演算子の処理の順序に注意を払わないと正しい符号が得られないことがある．電子・電子散乱に寄与する二つのファインマン図のうち，終状態の電子を入れ換えた方の振幅がマイナス符号を持ったのもその一例である．同じ理由で，ディラック粒子が反ディラック粒子で置き換えられたような反応も要注意となる．ここではこのような問題をまとめて整理しておこう．

まず始めに，(反) ディラック粒子と光子の結合を取り上げよう．このファインマン則はすでに 89 頁に与えたが，そこで，わざわざ「ディラック粒子（電荷 Q）またはその反粒子（電荷 $-Q$）と光子（A^{α}）の結合部」と書いた狙いは，「反粒子は電荷が $-Q$ だから，その結合は $-Q\gamma_{\alpha}$ となる」と勘違いしてはいけないと強調することだった．もしも反粒子には $-Q$ を用いるというのが規則なら，例えば電子と陽電子が対消滅するような場合には，何が結合定数なのかわからなくなるところだが，実際は，この結合部の係数（結合定数）Q は相互作

用ラグランジアンの $Q\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi A^\alpha$ から来ており，この項は粒子光子結合にも反粒子光子結合にも使われるから，どちらの結合部にも Q が入るのである．

しかし，こうは言っても，電磁相互作用の下での粒子・反粒子の振る舞いが全く同じということは有り得ない．それでは，粒子と反粒子の電荷が逆符号という事実は，どこに反映されるのだろうか．これを調べるために，電子・ミューオンおよび電子・反ミューオンという 2 種類の弾性散乱を例として比較してみよう．電子・ミューオン不変散乱振幅は，94 頁の問題で扱ったように，

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(e\mu \to e\mu)\\&\quad = e^2\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_3, s_3)\gamma_\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1, s_1)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_4, s_4)\gamma_\beta u_\mu(\boldsymbol{p}_2, s_2)\end{aligned} \qquad \text{(III.34)}$$

で与えられる．一方，電子・反ミューオン散乱の不変散乱振幅も，ここまでに学んだ計算手法で次のように導出できる：

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(e\bar{\mu} \to e\bar{\mu})\\&\quad = -e^2\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_3, s_3)\gamma_\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1, s_1)D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)\bar{v}_{\bar{\mu}}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\gamma_\beta v_{\bar{\mu}}(\boldsymbol{p}_4, s_4)\end{aligned} \qquad \text{(III.35)}$$

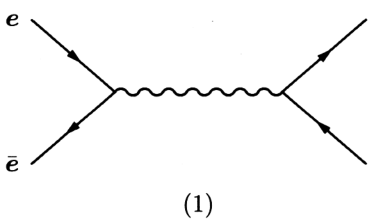
見ての通り，$\mathcal{M}(e\mu \to e\mu)$ と $\mathcal{M}(e\bar{\mu} \to e\bar{\mu})$ は符号が異なっている．この差はどこから来るのだろうか? 実は，その答えを見つけるのは難しくはない： ミューオン光子相互作用 $:\bar{\psi}_\mu\gamma_\alpha\psi_\mu: A^\alpha$ のミューオン部分を，その生成消滅演算子 $c^\dagger$，$d^\dagger$，c，d だけに焦点を絞った形で表せば

$$:\bar{\psi}_\mu\gamma_\alpha\psi_\mu: \sim :(c^\dagger + d)(c + d^\dagger): = c^\dagger c + c^\dagger d^\dagger + dc - d^\dagger d$$

だが，この中で $e\mu \to e\mu$，$e\bar{\mu} \to e\bar{\mu}$ に効くのは，それぞれ $c^\dagger c$，$d^\dagger d$ だから，後者の係数のマイナス符号がその出所である．上記の不変散乱振幅の非相対論的な極限を考えればクーロンポテンシャルが導かれ，ここで現れた符号の差は，同符号・異符号の電荷間の斥力・引力に対応することになる．♯ III.5

♯ III.5 例えば，巻末の参考図書で紹介している Peskin & Schroeder のテキスト 4.8 節参照．

実のところ，$e\mu \cdot e\bar{\mu}$ 散乱の場合は，このような見落とせない問題があるとは言えお互い独立な反応であって，断面積の計算に必要なのは $|\mathcal{M}(e\mu \to e\mu)|$, $|\mathcal{M}(e\bar{\mu} \to e\bar{\mu})|$ だから，符号の問題に必要以上に神経を使うこともない．しかし，これが電子・陽電子 → 電子・陽電子という散乱になると事情は変わる．この過程の不変散乱振幅は（摂動の最低次で）二つの項から成り，対応するファインマン図は以下のようになるが，このうち図 (2) に対応する項には上記の電子・反ミューオン散乱と同じ理由でマイナス符号が必要となり，これを忘れると正しい答が出せないのである．



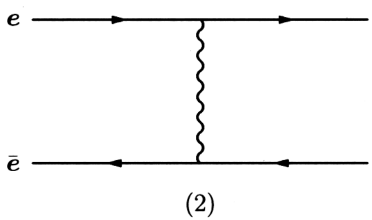


図 III.5

問題 III.4　電子・陽電子 → 電子・陽電子散乱の不変散乱振幅を求めよ．

なお，この電子・陽電子 → 電子・陽電子散乱は**バーバ散乱**（Bahbha scattering）とも呼ばれる．

ファインマン則の追加：

- ディラック粒子が反ディラック粒子で置き換えられた図に対応する振幅には -1 が掛かる

また,「ディラック粒子が交叉する図に対応する振幅には（相対符号）-1 が掛かる」というファインマン則は，始状態のディラック粒子（反ディラック粒子）と終状態の反ディラック粒子（ディラック粒子）の交換にも拡張することが出来る．実際，図 III.5 の (1)，(2) は互いにこの操作によって入れ換わり，こ

れに伴って符号も反対になっている．

ファインマン則への補足：

- 始状態のディラック粒子（反ディラック粒子）と終状態の反ディラック粒子（ディラック粒子）が入れ換わっても -1 が掛かる

最後に，ディラック粒子伝播関数にも注意が必要だろう．例として，陽電子・光子散乱を考えよう．この過程の不変散乱振幅も，ここまでの手法を適用して

$$\mathcal{M}(\gamma\bar{e} \to \gamma\bar{e}) = -e^2\,\bar{v}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\not{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1, s_1)S_{\mathrm{F}}(-q)\not{\epsilon}^*(\boldsymbol{p}_3, s_3)v(\boldsymbol{p}_4, s_4) \\ - e^2\,\bar{v}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\not{\epsilon}^*(\boldsymbol{p}_3, s_3)S_{\mathrm{F}}(-q')\not{\epsilon}(\boldsymbol{p}_1, s_1)v(\boldsymbol{p}_4, s_4) \qquad \text{(III.36)}$$

（$q = p_1 + p_2, q' = p_2 - p_3$）と求まる．これを (III.33) 式と比べれば，始・終状態の電子を表す $u(\boldsymbol{p}, s)$ は陽電子を表す $v(\boldsymbol{p}, s)$ に置き換わるが，中間状態には電子の場合と同じ伝播関数 S_{F} が現れることがわかる．但し，その扱いは全く同じという訳ではない．つまり，上の式の第 1 項・第 2 項で，中間状態を進む陽電子の 4 元運動量はそれぞれ q および q' であるのに，対応する S_{F} の引数は $-q$，$-q'$ となっている．

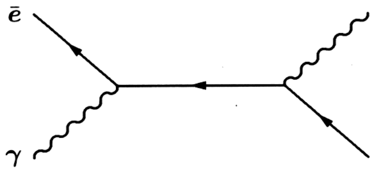
問題 III.5　陽電子・光子散乱の不変散乱振幅 (III.36) を実際に導出せよ．

ファインマン則の追加：

- 内部を走る反ディラック粒子（4 元運動量 q）には伝播関数　$S_{\mathrm{F}}(-q)_{ij}$ が対応する．

この過程のファインマン図はどうなるだろうか．98 頁において，ディラック粒子伝播関数は，その引数と同じ向きの矢印付き実線で表すと約束したことを思い出せば，結局，振幅 (III.36) の第 1・2 項は，それぞれ次のファインマン図 (1)，(2) で表されることがわかる．これでこの場合も，始状態・中間状態・終状態の陽電子が，向きの揃った矢印付きの実線で結ばれる．要するに，電子・

光子散乱の場合のファインマン図（図 III.4）で，電子を表す実線の矢印の向きを全て逆転させればよいのである．



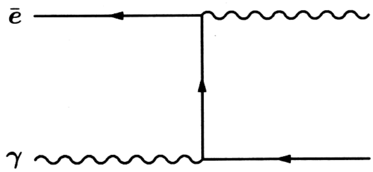


図 III.6

6．ファインマン則

ここまでで，量子電磁力学（QED）の摂動計算に必要なファインマン則は，ディラック粒子-光子系に関しては出揃ったことになる．更に，スカラー粒子の QED，より複雑な量子色力学（Quantum Chromodynamics 略して QCD）や電弱標準理論（Standard electroweak theory）についても，同様の計算で対応するファインマン則を導出することが出来る.[♯III.6] このように，一旦ファインマン則がわかると，それに従って一気に必要な不変散乱振幅を書き下すことが可能となる．また，計算に慣れてくれば，相互作用ラグランジアンの形を見ただけでファインマン則を見つけることも可能である．すると，その不変散乱振幅から断面積や崩壊幅を計算するのが残る重要な作業ということになる．

なお，ここで与えたファインマン則は，不変散乱振幅 $\mathcal{M}$ そのものを導き出す規則だが，他の多くの教科書では $(-)i\mathcal{M}$ を得るように規則が作られている．そこでは，例えば電子伝播関数として $1/(\not{p}-m)$ の替りに $i/(\not{p}-m)$ が，また，電子・光子結合部として $-e\gamma_\mu$ ではなく $-ie\gamma_\mu$ が用いられる．断面積や崩壊幅

[♯III.6] QCD のファインマン則については，例えば「Foundations of Quantum Chromodynamics」（T. Muta, World Scientific）参照．電弱標準理論については，最も詳しい規則が「Electroweak Theory」（青木 健一他，Prog. Theor. Phys. Suppl. **73**: 理論物理学刊行会）に与えられている．

の計算に必要なのは $|\mathcal{M}|$ なので，その差に神経質になることもないが，本書の規則では虚数単位 i の現れる回数が最小限に抑えられており，その点でスッキリしている．この方式は九後により考案された．

量子電磁力学

ここで，繰り返しにはなるが，量子電磁力学の基本事項をまとめておこう．

ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \sum_f \left[\, i\,\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_f(x) - m_f\bar{\psi}_f(x)\psi_f(x) + Q_f\bar{\psi}_f(x)\gamma^\mu\psi_f(x)A_\mu(x)\,\right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}\partial^\mu A_\mu(x)\partial^\nu A_\nu(x) \qquad \text{(III.37)}$$

但し，m_f と Q_f は，それぞれディラック粒子 f の質量と電荷．

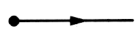
ディラック粒子伝播関数

$$S_{\mathrm{F}}(q) = \frac{1}{m - \not{q} - i\varepsilon}\left(\equiv \frac{m + \not{q}}{m^2 - q^2 - i\varepsilon}\right) \qquad \text{(III.38)}$$

光子伝播関数

$$D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{q^2 + i\varepsilon}\left[\, g^{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{q^\mu q^\nu}{q^2 + i\varepsilon}\,\right] \qquad \text{(III.39)}$$

ファインマン図

- 始状態のディラック粒子は結合部に向かう実線で表し，同じ向きに矢印を付ける： 
- 始状態の反ディラック粒子は結合部に向かう実線で表し，逆向きに矢印を付ける： 
- 終状態のディラック粒子は結合部から出る実線で表し，同じ向きに矢印を付ける： 
- 終状態の反ディラック粒子は結合部から出る実線で表し，逆向きに矢印を付ける： 
- 始状態の光子は結合部に向かう波線で表す： 

- 終状態の光子は結合部から出る波線で表す： 
- 結合部 1 から結合部 2 に向かうディラック粒子は
  1 から 2 に向かう矢印付き実線で表す： 1  2
- 結合部 1 から結合部 2 に向かう反ディラック粒子は
  2 から 1 に向かう矢印付き実線で表す： 1  2
- 結合部 1 から結合部 2 に向かう光子は
  1 と 2 を結ぶ波線で表す： 1  2

ファインマン則

- 始状態のディラック粒子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$u(\boldsymbol{p}, s)$
- 始状態の反ディラック粒子（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\bar{v}(\boldsymbol{p}, s)$
- 終状態のディラック粒子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\bar{u}(\boldsymbol{p}, s)$
- 終状態の反ディラック粒子（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$v(\boldsymbol{p}, s)$
- 始状態の光子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{p}, s)$
- 終状態の光子　（運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン変数 s）には　$\varepsilon^*_\alpha(\boldsymbol{p}, s)$
- 中間状態を走るディラック粒子（4 元運動量 q）には　$S_\mathrm{F}(q)$
- 中間状態を走る反ディラック粒子（4 元運動量 q）には　$S_\mathrm{F}(-q)$
  （S_F は (4,4) 行列であることを忘れないように）
- 中間状態を走る光子（4 元運動量 q）には　$D_\mathrm{F}^{\alpha\beta}(q)$
- ディラック粒子（電荷 Q）またはその反粒子（電荷 $-Q$）と
  光子（A^α）の結合部には　$Q\gamma_\alpha$
  をそれぞれ対応させ，それらを，反応の進む順序を考えながら全体がスカラーになるように組み合わせる．なお，伝播関数の運動量は，その端点（結合部）での 4 元運動量保存則に従って決められる．

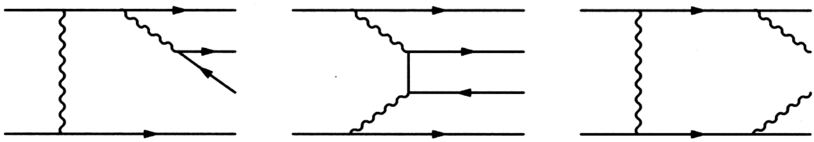
最後に，

- 始状態または終状態のディラック粒子または反ディラック粒子同士を交換した振幅，および始状態のディラック粒子（反ディラック粒子）と終状態の反ディラック粒子（ディラック粒子）が入れ換わった振幅には -1 を掛ける．
- ディラック粒子が反ディラック粒子で置き換えられた反応に対応する振幅

にも -1 を掛ける. ∎

なお，より複雑な過程や最低次近似を超えた摂動計算では，さらに**対称性因子**，**符号因子**の付与などといった規則も必要になるが，これは本書のカバーする範囲を超えるので省略する.♯ III.7

問題 III.6　以下のファインマン図が表す振幅を書け（図が少々複雑なので幾つかの矢印は省略したが，意味は明らかだろう）：



(1)　(2)　(3)

問題 III.7　摂動の最低次において，以下の反応を表すファインマン図を全て描き，それを用いて不変散乱振幅を求めよ：

(1) $\gamma e \to \gamma e \gamma$,　(2) $e\mu \to e\mu\gamma$,　(3) $e\bar{e} \to \gamma\gamma$

III.2 散乱断面積および崩壊幅の計算

摂動計算の最終段階として，幾つかの反応の散乱断面積あるいは崩壊幅を，その不変散乱振幅から導出してみよう．まず，次のような振幅を例として，一般的な方針を説明しておく：

$$\mathcal{M}_{fi} = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\Gamma_\alpha u(\boldsymbol{p}_1, s_1)\varepsilon^\alpha(\boldsymbol{q}, \lambda) \tag{III.40}$$

但し，Γ_α は γ 行列の任意の組み合わせである．

$$\bar{u}_i^* = (u^\dagger\gamma^0)_i^* = \sum_k (u_k^*\gamma_{ki}^0)^* = \sum_k u_k(\gamma^0)_{ki}^* = \sum_k u_k(\gamma^{0\dagger})_{ik} = (\gamma^0 u)_i$$

♯ III.7 例えば「場の量子論」（中西襄，培風館）第 4 章参照．もちろん，本書で解説した手法で慎重に計算を進めるなら，正しい結果は求められる．

に注意すれば，この絶対値の 2 乗は $\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ と置いて

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{M}_{fi}|^2 \\
&= \bar{u}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\Gamma_\alpha u(\boldsymbol{p}_1, s_1)\varepsilon^\alpha(\boldsymbol{q}, \lambda)[\bar{u}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\Gamma_\beta u(\boldsymbol{p}_1, s_1)]^* \varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{q}, \lambda) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \bar{u}_i(\boldsymbol{p}_2, s_2)(\Gamma_\alpha)_{ij} u_j(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{u}_k(\boldsymbol{p}_1, s_1)(\bar{\Gamma}_\beta)_{kl} u_l(\boldsymbol{p}_2, s_2)\varepsilon^\alpha(\boldsymbol{q}, \lambda)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{q}, \lambda) \\
&= \sum_{i,j,k,l} u_l(\boldsymbol{p}_2, s_2)\bar{u}_i(\boldsymbol{p}_2, s_2)(\Gamma_\alpha)_{ij} u_j(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{u}_k(\boldsymbol{p}_1, s_1)(\bar{\Gamma}_\beta)_{kl}\varepsilon^\alpha(\boldsymbol{q}, \lambda)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{q}, \lambda) \\
&= \sum_{i,j,k,l} [u(\boldsymbol{p}_2, s_2)\bar{u}(\boldsymbol{p}_2, s_2)]_{li}(\Gamma_\alpha)_{ij}[u(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{u}(\boldsymbol{p}_1, s_1)]_{jk}(\bar{\Gamma}_\beta)_{kl}\varepsilon^\alpha(\boldsymbol{q}, \lambda)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{q}, \lambda) \\
&= \mathrm{Tr}[\, u(\boldsymbol{p}_2, s_2)\bar{u}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\, \Gamma_\alpha\, u(\boldsymbol{p}_1, s_1)\bar{u}(\boldsymbol{p}_1, s_1)\, \bar{\Gamma}_\beta\,]\varepsilon^\alpha(\boldsymbol{q}, \lambda)\varepsilon^{\beta *}(\boldsymbol{q}, \lambda) \qquad \text{(III.41)}
\end{aligned}
$$

となる．ここでスピノルの部分は

$$
u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = \frac{1 + \gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p} + m)
$$

と置き換えられるので，結局トレースの中は全て γ 行列になる．考える反応に依ってはこのトレース計算も大変だが，ともかく付録 3 に与えた γ 行列の公式を繰り返し適用すれば計算できる．これが必要な作業の中心部分である．後は，具体例を通じて詳細を見ることにしよう．

1．電子・陽電子対消滅

光子場に対してファインマン ゲージを採用すれば，III.1.2 で導いた $e\bar{e} \to \gamma \to \mu\bar{\mu}$ の散乱振幅は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(e\bar{e} \to \mu\bar{\mu}) &= e^2 \bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4, s_4) D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(q)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2, s_2)\gamma_\beta u_e(\boldsymbol{p}_1, s_1) \\
&= \frac{e^2}{q^2}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4, s_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2, s_2)\gamma^\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1, s_1) \qquad \text{(III.42)}
\end{aligned}
$$

$(q = p_1 + p_2)$ となる．但し，ここでは $q^2 \geq 4m_\mu^2$，つまり，常に $q^2 \neq 0$ なので，光子伝播関数の分母から無限小定数部分 $i\varepsilon$ は除いた（これ以降も同様）．

はじめに，出発点となる公式を整理しておく：

● 微分断面積の公式

粒子１＋粒子２ → 粒子３＋粒子４＋ ⋯ ＋粒子ｎの場合

$$d\sigma = d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_3 d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_4 \cdots d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_n \times \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}}(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \cdots - p_n)$$

● 補足１

始状態が偏極していない，つまり，いずれの入射ビーム内においても，全スピン状態に亙って粒子が一様に分布している場合には，どちらのスピンについても平均をとる.[♯III.8] これは，両粒子のスピン自由度をそれぞれ f_{s1}，f_{s2} として，$|\mathcal{M}_{fi}|^2$ を

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \ \rightarrow\ \frac{1}{f_{s1}}\frac{1}{f_{s2}}\sum_{s_1,s_2}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

と置き換えることを意味する（例えば，質量を持つスピン σ の粒子なら $f_s = 2\sigma + 1$ である）. ▮

● 補足２

調べたい生成粒子のスピンを測定しない場合，言い換えれば，どのスピン状態の粒子も終状態として数える場合には，それらについての和をとる：

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \ \rightarrow\ \sum_{s_3,\cdots,s_n}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

従って，偏極していないビームで終状態のスピンも見ない実験の場合には，上の断面積の公式で $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ の替りに

$$\frac{1}{f_{s1}}\frac{1}{f_{s2}}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,\cdots,s_n}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

を用いることになる. ▮

以下ではこのような場合について考える.[♯III.9] $\sigma_{電子} = 1/2$ より $f_{s1,s2} = 2 \times (1/2) + 1 = 2$ だから，$s = (p_1 + p_2)^2 = q^2$ と置き，スピノル中のスピン変数

[♯III.8] 実際の実験は，非常に多くの粒子群（粒子ビーム）同士の衝突という形で行われ，断面積もそのような状況の下で定義されることを思い出そう（II.5 節を見よ）.

[♯III.9] スピンの平均や和をとらない場合の計算はずっと複雑になるのでここではやらず，III.2.5, III.2.6 でまとめて解説する.

$s_{1,2,3,4}$ は省略すれば，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}|\mathcal{M}(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu})|^2 \\
&= \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1) \\
&\qquad\qquad \times\left[\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\beta v_\mu(\boldsymbol{p}_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\beta u_e(\boldsymbol{p}_1)\right]^* \\
&= \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4)\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1) \\
&\qquad\qquad \times\bar{v}_\mu(\boldsymbol{p}_4)\gamma_\beta u_\mu(\boldsymbol{p}_3)\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_1)\gamma^\beta v_e(\boldsymbol{p}_2) \\
&= \frac{e^4}{4s^2}\sum_{s_1,s_2}\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_1)\gamma^\beta v_e(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad\qquad \times\sum_{s_3,s_4}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4)\bar{v}_\mu(\boldsymbol{p}_4)\gamma_\beta u_\mu(\boldsymbol{p}_3)
\end{aligned}
$$

ここで，

- スピノルについての公式

$$
u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s) = \frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p}+m), \quad v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s) = \frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}(\not{p}-m)
$$

を用いてスピン和をとると

$$
\sum_s u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s) = \not{p}+m, \quad \sum_s v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s) = \not{p}-m
$$

（これ自体よく利用される公式である）

但し，電子はミューオンに比べて非常に軽いので，以後 $m_e = 0$ と置く.♯ III.10

- γ 行列の公式

$$
\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})
$$

も用いて

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s_1,s_2}\bar{v}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\alpha u_e(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_1)\gamma^\beta v_e(\boldsymbol{p}_2) \\
&\qquad = \mathrm{Tr}(\gamma^\alpha \not{p}_1\gamma^\beta \not{p}_2) = (p_1)_\rho(p_2)_\sigma \mathrm{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\rho\gamma^\beta\gamma^\sigma) \\
&\qquad = 4\left[{p_1}^\alpha {p_2}^\beta + {p_1}^\beta {p_2}^\alpha - g^{\alpha\beta}(p_1p_2)\right]
\end{aligned}
$$

♯ III.10 $m_e = 0.511$ MeV, $m_\mu = 106$ MeV

一方，ミューオンの方には m_μ の項が余分に現れる：

- γ 行列の公式

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad \mathrm{Tr}(\text{ 奇数個の }\gamma\text{ 行列の積 }) = 0$$

も併せて用いて

$$\begin{aligned}&\sum_{s_3,s_4} \bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha v_\mu(\boldsymbol{p}_4)\bar{v}_\mu(\boldsymbol{p}_4)\gamma_\beta u_\mu(\boldsymbol{p}_3)\\ &\quad = \mathrm{Tr}\,\gamma_\alpha(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma_\beta(\not{p}_3 + m_\mu) = \mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\not{p}_4\gamma_\beta\not{p}_3) - m_\mu^2\mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta)\\ &\quad = 4\left[p_{3\alpha}p_{4\beta} + p_{3\beta}p_{4\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_3p_4 + m_\mu^2)\right]\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}|\mathcal{M}(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu})|^2\\ &= \frac{4e^4}{s^2}\left[p_1{}^\alpha p_2{}^\beta + p_1{}^\beta p_2{}^\alpha - g^{\alpha\beta}(p_1p_2)\right]\left[p_{3\alpha}p_{4\beta} + p_{3\beta}p_{4\alpha} - g_{\alpha\beta}(p_3p_4 + m_\mu^2)\right]\\ &= \frac{8e^4}{s^2}\left[(p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3) + m_\mu^2(p_1p_2)\right] \qquad \text{(III.43)}\end{aligned}$$

を得る．

次に，これを運動量 $p_{1,2,3,4}$ の各成分を用いて実用的な形に書き直そう．重心系で考えると

$$\begin{aligned}&p_1^\mu = (p_1^0, \boldsymbol{p}_1) = (\sqrt{s}/2, \boldsymbol{p}_e), \quad p_2^\mu = (p_2^0, \boldsymbol{p}_2) = (\sqrt{s}/2, -\boldsymbol{p}_e)\\ &p_3^\mu = (p_3^0, \boldsymbol{p}_3) = (\sqrt{s}/2, \boldsymbol{p}_\mu), \quad p_4^\mu = (p_4^0, \boldsymbol{p}_4) = (\sqrt{s}/2, -\boldsymbol{p}_\mu) \qquad \text{(III.44)}\end{aligned}$$

であり，かつ

$$\sqrt{s} = 2p_{1,2}^0 = 2|\boldsymbol{p}_e| = 2p_{3,4}^0 = 2\sqrt{\boldsymbol{p}_\mu^2 + m_\mu^2}$$

より

$$|\boldsymbol{p}_e| = \sqrt{s}/2, \qquad |\boldsymbol{p}_\mu| = \beta\sqrt{s}/2 \quad (\ \beta \equiv \sqrt{1 - 4m_\mu^2/s}\ )$$

だから，$\boldsymbol{p}_e$ と $\boldsymbol{p}_\mu$ のなす角度を θ として（図 III.7）

$$p_1p_2 = s/2,\ \ p_1p_3 = p_2p_4 = s(1-\beta\cos\theta)/4,\ \ p_1p_4 = p_2p_3 = s(1+\beta\cos\theta)/4$$

従って，

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4}|\mathcal{M}(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu})|^2 = e^4\left(1+\beta^2\cos^2\theta+\frac{4m_\mu^2}{s}\right) \tag{III.45}$$

となる．

最後に，これを粒子 1 ($\boldsymbol{p}$) ＋粒子 2 ($-\boldsymbol{p}$) → 粒子 3 ($\boldsymbol{q}$) ＋粒子 4 ($-\boldsymbol{q}$) の場合の公式（II.48）

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2}\frac{|\boldsymbol{q}|}{s|\boldsymbol{p}|}|\mathcal{M}_{fi}|^2$$

と組み合わせ，**微細構造定数** $\alpha \equiv e^2/(4\pi)\ (= 1/137.036)$ も用いて

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu}) = \frac{\alpha^2}{4s}\beta\left(1+\beta^2\cos^2\theta+\frac{4m_\mu^2}{s}\right) \tag{III.46}$$

という微分断面積に達する．また，全断面積は角度積分を実行することにより

$$\sigma(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\beta\left(1+\frac{2m_\mu^2}{s}\right) \tag{III.47}$$

と求まるが，これはミューオン質量も無視できる高エネルギー領域（$s \gg m_\mu^2$）では

$$\sigma(e\bar{e}\to\mu\bar{\mu}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \tag{III.48}$$

と非常に簡単になる．この式は，種々の高エネルギー反応断面積を表すための単位としてよく用いられる．

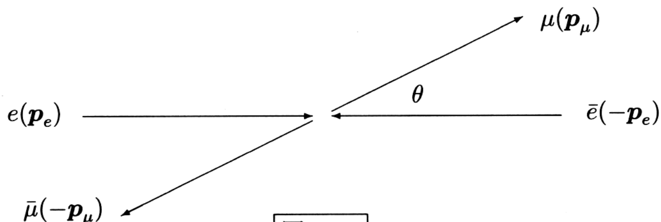


図 III.7

2．電子・ニュートリノ散乱

電子とニュートリノの散乱には幾種類かあるが，ここでは $\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ を扱ってみる．この散乱は弱相互作用を通じて起こる．弱相互作用の過程には，$\mathrm{W}^\pm$ 交換によるものとZ交換によるものがあり，Wは電荷を持つがZは電気的に中性なので，前者は荷電弱相互作用，後者は中性弱相互作用と名付けられている．$\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ は前者による反応で，結合定数を g として

$$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = \frac{g}{2\sqrt{2}}\Big[\, J^{\mathrm{CC}}_\alpha(x) W^{+\alpha}(x) + J^{\mathrm{CC}\dagger}_\alpha(x) W^{-\alpha}(x) \,\Big] \tag{III.49}$$

という相互作用ラグランジアンで記述されることが知られている．ここで，

$$J^{\mathrm{CC}}_\alpha(x) = \sum_{\ell=e,\mu} :\bar{\psi}_{\nu_\ell}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\psi_\ell(x): \tag{III.50}$$

は**荷電弱カレント**（Charged weak current）と呼ばれる．これは，ベクトル（V）型カレント $\bar{\psi}\gamma_\alpha\psi$ と軸性ベクトル（A）型カレント $\bar{\psi}\gamma_\alpha\gamma_5\psi$ の差の形になっているのが大きな特徴で，**V－A 型カレント**という名がある．この相互作用についても III.1 に示した手順で，次のようなファインマン則を導くことが出来る：

- 内部（中間状態）を走るWボソンにはWボソン伝播関数 $D^{W\,\alpha\beta}_\mathrm{F}(q)$ を，また，
- ディラック粒子とWボソン（W^α）の結合部（頂点）には $\dfrac{g}{2\sqrt{2}}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)$ を対応させる．

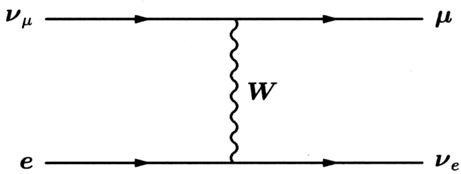


図 III.8

Wボソン（一般にはベクトル粒子）は，光子と同じく波線で表されるので，[♯III.11]

♯III.11 電荷を持つベクトル粒子の波線には，正電荷の流れの向きを示す矢印を付けることもある．

摂動の最低次での $\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ のファインマン図は図 III.8 のようになる． これに対応する不変散乱振幅は，$D_{\mathrm{F}}^{W}(q)$ に対してファインマンゲージを採れば，上記および始・終状態ディラック粒子のファインマン則より

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \mu\nu_e) \\
&= \frac{g^2}{8}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1, s_1)D_{\mathrm{F}}^{W\,\alpha\beta}(q)\bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4, s_4)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2, s_2) \\
&= \frac{g^2}{8(q^2-M_W^2)}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3, s_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1, s_1) \\
&\qquad\qquad \times \bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4, s_4)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2, s_2)
\end{aligned}
\tag{III.51}
$$

（$q = p_3 - p_1$）と求まる．なお，W^+ と W^- は，お互いに粒子・反粒子の関係にある．従って，図 III.8 の中の W は，下向きに進む W^+ と言ってもよいし，上向きに進む W^- と言ってもよい．また，$\mathrm{W}^\pm$ は非常に重く，その質量は M_W =80.4 GeV である．

• 補足 3

現実に存在するニュートリノは全て左巻き（$h=-1$）なので，始状態のスピン平均や終状態のスピンの足し上げは不要（但し，この点については後述のコメントも見ること）．その替りに以下の公式が必要となる．

$$
u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = \frac{1-\gamma_5}{2}\not{p}
$$

同じ理由で，反ニュートリノ（$h=+1$）に対しては

$$
v(\boldsymbol{p}, s)\bar{v}(\boldsymbol{p}, s) = \frac{1-\gamma_5}{2}\not{p}
$$

を用いる．∎

具体的な計算に進もう．再びスピノルのスピン変数は省略して

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{s_2, s_3}|\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \mu\nu_e)|^2 \\
&\quad = \frac{g^4}{128(q^2-M_W^2)^2}\sum_{s_2, s_3}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Big[\,\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2)\,\Big]^*\\
=&\frac{g^4}{128(q^2-M_W^2)^2}\sum_{s_2,s_3}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2)\\
&\times\bar{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p}_3)\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)\\
=&\frac{g^4}{128(q^2-M_W^2)^2}\sum_{s_3}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p}_3)\\
&\times\sum_{s_2}\bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2)\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)
\end{aligned}
$$

ここで，$e\bar{e}\to\mu\bar{\mu}$ の場合と同様に，電子・ミューオンについてはスピン和（平均）を実行し，ニュートリノについては上記の公式を使うと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s_3}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p}_3)\\
&=\mathrm{Tr}\,(\not{p}_3+m_\mu)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\frac{1-\gamma_5}{2}\not{p}_1\gamma_\beta(1-\gamma_5)\\
&=\mathrm{Tr}\,(\not{p}_3+m_\mu)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\not{p}_1\gamma_\beta(1-\gamma_5)\\
&=2\,\mathrm{Tr}\,(\not{p}_3+m_\mu)\gamma_\alpha\not{p}_1\gamma_\beta(1-\gamma_5)\\
&=2\,\mathrm{Tr}\,(\not{p}_3+m_\mu)\gamma_\alpha\not{p}_1\gamma_\beta\;-2\,\mathrm{Tr}\,(\not{p}_3+m_\mu)\gamma_\alpha\not{p}_1\gamma_\beta\gamma_5
\end{aligned}
$$

この中で m_μ を含む項は，奇数個の γ 行列のトレースだから 0 になる（γ_5 は 4 個の γ 行列の積であることに注意）．第 1 項で $\not{p}_3$ を含む項には，すでに前の計算で用いた公式が適用できる．また，第 2 項の中の $\not{p}_3$ を含む項は，

- γ 行列の公式

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_5)=4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

を用いて計算される．但し，ここで $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は 4 階の反対称テンソル（レヴィ-チヴィタ テンソル：Levi-Civita tensor）で，その 0123 成分は

$$\varepsilon_{0123}(=-\varepsilon^{0123})=1$$

である．結果は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s_3}\bar{u}_\mu(\boldsymbol{p}_3)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\bar{u}_{\nu_\mu}(\boldsymbol{p}_1)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p}_3)\\
&=8\,[\,p_{1\alpha}p_{3\beta}+p_{1\beta}p_{3\alpha}-g_{\alpha\beta}(p_1p_3)-i\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}{p_1}^\rho {p_3}^\sigma\,] \qquad \text{(III.52)}
\end{aligned}
$$

同様に，電子の項についても

$$\sum_{s_2} \bar{u}_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_e(\boldsymbol{p}_2)\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u_{\nu_e}(\boldsymbol{p}_4)$$
$$= \mathrm{Tr}\,\frac{1-\gamma_5}{2}\not{p}_4\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{p}_2\gamma^\beta(1-\gamma_5)$$
$$= \mathrm{Tr}\,\not{p}_4\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{p}_2\gamma^\beta(1-\gamma_5) = 2\,\mathrm{Tr}\,\not{p}_4\gamma^\alpha\not{p}_2\gamma^\beta(1-\gamma_5)$$
$$= 8\left[\,{p_2}^\alpha {p_4}^\beta + {p_2}^\beta {p_4}^\alpha - g^{\alpha\beta}(p_2p_4) - i\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}{p_2}^\rho {p_4}^\sigma\,\right] \tag{III.53}$$

但し，電子の質量は始めから無視した．

• 補足 3 へのコメント

実は，ニュートリノのスピンの扱いについては，もっと簡単な方法がある．それは，スピンについて，質量のあるディラック粒子の場合と同様に和をとってしまうことである．但し，実際には右巻き状態は存在していないのだから，始状態についても 2 で割ることはしない．つまり，始状態についても終状態についても

$$\sum_s u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = \not{p}$$

を用いるのである．∎

問題 III.8　(III.52)，(III.53) を導出する計算において，上記コメントが正しいことを確認せよ．

さて，次の作業はミューオン項と電子項の積の計算だが，手を動かさなくても直ちにわかることがある．それは，反対称テンソル $\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$ を含まない項は α, β の交換に対して対称であり，一方，それを含む項は当然のことながら反対称なので，両者の積は 0 になるということである．この点も考慮すると，ここまでの結果より

$$\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_3} |\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \mu\nu_e)|^2$$
$$= \frac{g^4}{2(q^2 - M_W^2)^2}\Big[\,\big[\,(p_1)_\alpha(p_3)_\beta + (p_1)_\beta(p_3)_\alpha - g_{\alpha\beta}(p_1p_3)\,\big]$$

$$\times \left[(p_2)^\alpha (p_4)^\beta + (p_2)^\beta (p_4)^\alpha - g^{\alpha\beta}(p_2 p_4) \right]$$

$$- \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} {p_1}^\gamma {p_3}^\delta {p_2}^\rho {p_4}^\sigma \Big]$$

第2項の計算には

● 公式

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\, \varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\alpha\beta} = -2(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$

を用いる．結果は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_3} |\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \mu\nu_e)|^2 \\
&= \frac{g^4}{(q^2 - M_W^2)^2}\Big[\left[(p_1p_2)(p_3p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3) \right] \\
&\qquad + \left[(p_1p_2)(p_3p_4) - (p_1p_4)(p_2p_3) \right] \Big] \\
&= \frac{2g^4}{(q^2 - M_W^2)^2}(p_1p_2)(p_3p_4)
\end{aligned}$$

更に，$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = 2p_1p_2 = 2p_3p_4 + m_\mu^2$ を用いて

$$\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_3} |\mathcal{M}(\nu_\mu e \to \mu\nu_e)|^2 = \frac{g^4}{2}\frac{s(s - m_\mu^2)}{(q^2 - M_W^2)^2} \qquad \text{(III.54)}$$

と簡単な形にまとまる．

従って，重心系の微分断面積は，$|\boldsymbol{p}_1| = \sqrt{s}/2$, $|\boldsymbol{p}_3| = (s - m_\mu^2)/(2\sqrt{s})$ より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\nu_\mu e \to \mu\nu_e) = \frac{g^4}{128\pi^2 s}\frac{(s - m_\mu^2)^2}{(q^2 - M_W^2)^2} \qquad \text{(III.55)}$$

となる．更に，$q^2 = -(s - m_\mu^2)(1 - \cos\theta)/2$（$\theta$: $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_3$ のなす角）に注意して角度積分を実行すれば

$$\sigma(\nu_\mu e \to \mu\nu_e) = \frac{g^4}{32\pi M_W^2}\frac{(s - m_\mu^2)^2}{s(s - m_\mu^2 + M_W^2)} \qquad \text{(III.56)}$$

という全断面積が得られる．

電子・陽電子衝突とは違って $\nu_\mu e$ 衝突型加速器など存在しないのだから，実際の実験は，重心系ではなく電子の静止系（実験室系）で行われる．しかし，主に必要になるデータは全断面積であって，勿論これはどんな系でも同じ値なので，上記の σ で十分有用な式と言える．微分断面積の実験室系での表現については次の電子・光子散乱の中で解説する．

3．電子・光子散乱

電子・光子散乱の不変散乱振幅は，III.1.4 において

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\gamma e \to \gamma e) &= e^2\bar{u}(\boldsymbol{p}_4, s_4)\not\varepsilon^*(\boldsymbol{p}_3, s_3)S_{\mathrm{F}}(q)\not\varepsilon(\boldsymbol{p}_1, s_1)u(\boldsymbol{p}_2, s_2)\\ &\quad + e^2\bar{u}(\boldsymbol{p}_4, s_4)\not\varepsilon(\boldsymbol{p}_1, s_1)S_{\mathrm{F}}(q')\not\varepsilon^*(\boldsymbol{p}_3, s_3)u(\boldsymbol{p}_2, s_2) \qquad \text{(III.57)}\end{aligned}$$

（$q = p_1 + p_2, q' = p_2 - p_3$）と求められた．これが出発点である．

具体的な計算に入る前に，電子・光子の運動量と光子の偏極ベクトルの関係を見ておこう．静止した電子に光子が衝突する実験室系において，入射光子の運動量 $\boldsymbol{p}_1$ の向きに z 軸をとる．すると $p_1 = (|\boldsymbol{p}_1|, 0, 0, |\boldsymbol{p}_1|), p_2 = (m, 0, 0, 0)$ であり，また，すでに公式で与えたように，入射光子の偏極ベクトルは

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}_1, 0) = (1,0,0,0), \quad \varepsilon(\boldsymbol{p}_1, 1) = (0,1,0,0),$$
$$\varepsilon(\boldsymbol{p}_1, 2) = (0,0,1,0), \quad \varepsilon(\boldsymbol{p}_1, 3) = (0,0,0,1)$$

と選ぶことが出来る．特に，ここで扱うのは**実光子**（Real photon）[♯III.12] であって完全に横偏極しているから，$\varepsilon(\boldsymbol{p}_1, s_1)p_1 = \varepsilon(\boldsymbol{p}_1, s_1)p_2 = 0$ ($s_1 = 1,\ 2$) という関係が満たされる．また，散乱光子の偏極ベクトルは単に入射光子のそれを空間回転したものだから，その横偏極ベクトルの時間成分はやはり 0 になる．従って，$\varepsilon(\boldsymbol{p}_3, s_3)p_3 = 0$ に加えて $\varepsilon(\boldsymbol{p}_3, s_3)p_2 = 0$ も成り立つ．これらの関係式はス

[♯III.12] 始・終状態に存在する光子，要するに現実世界の光子のことで，その 4 元運動量 p^μ はオンシェル，つまり $p^2 = 0$ を満たす．これに対し，反応の中間状態を伝播関数として走る光子は**仮想光子**（Virtual photon）と呼ばれ，一般にオフシェルの運動量を持つ．つまり $p^2 \neq 0$ である（53 頁の脚注参照）．

カラー量で表されているので，他の系に移ってもそのまま成立する．この関係を利用すれば，計算は少し簡単になる．[♯III.13] 以下では，式変形が長くなり過ぎると見づらいので

$$\varepsilon_i = \varepsilon(\boldsymbol{p}_1, s_1), \quad u_i = u(\boldsymbol{p}_2, s_2), \quad \varepsilon_f = \varepsilon(\boldsymbol{p}_3, s_3), \quad u_f = u(\boldsymbol{p}_4, s_4)$$

と略記することにしよう．後で見易いように，この略記法で偏極ベクトルの性質をまとめておく：

$$\varepsilon_i p_1 = \varepsilon_i p_2 = \varepsilon_f p_2 = \varepsilon_f p_3 = 0, \quad \varepsilon_{i,f}^2 = -1 \tag{III.58}$$

さて，$\mathcal{M}(\gamma e \to \gamma e)$ の中身を，電子伝播関数も含めてあらわに書けば

$$\mathcal{M} = e^2\, \bar{u}_f \Big[\, \not\varepsilon_f^* \frac{m + \not p_2 + \not p_1}{m^2 - (p_2 + p_1)^2} \not\varepsilon_i + \not\varepsilon_i \frac{m + \not p_2 - \not p_3}{m^2 - (p_2 - p_3)^2} \not\varepsilon_f^* \,\Big] u_i \tag{III.59}$$

である．まず，電子伝播関数の分母は

$$m^2 - (p_2 + p_1)^2 = -2p_2 p_1, \quad m^2 - (p_2 - p_3)^2 = 2p_2 p_3$$

と変形できる．次に，$\mathcal{M}$ の右辺第 1 項で $m + \not p_2 + \not p_1$ と $\not\varepsilon_i$ の順序を交換する：

$$\begin{aligned}
(m + \not p_2 + \not p_1)\not\varepsilon_i &= m\not\varepsilon_i + (\not p_2 + \not p_1)\not\varepsilon_i \\
&= 2\varepsilon_i(p_2 + p_1) - \not\varepsilon_i(\not p_2 + \not p_1 - m) = -\not\varepsilon_i(\not p_2 + \not p_1 - m) = -\not\varepsilon_i \not p_1
\end{aligned}$$

ここで，最後の変形では，$\not p_2 - m$ はこの右側の u_i に掛かるとディラック方程式により 0 になってしまうということで落とした．まったく同様の計算で，第 2 項についても

$$(m + \not p_2 - \not p_3)\not\varepsilon_f^* = \not\varepsilon_f^* \not p_3$$

となるので，$\mathcal{M}$ は

[♯III.13] 散乱電子の運動量の 4 成分は一般にはどれも 0 ではないので，$\varepsilon(\boldsymbol{p}_{1,3}, s_{1,3})p_4 = 0$ とはならない．散乱電子が静止しているような座標系を考え，そこで光子の偏極ベクトルをここと同じように決めれば $\varepsilon(\boldsymbol{p}_{1,3}, s_{1,3})p_4 = 0$ とは出来るが，その場合には $\varepsilon(\boldsymbol{p}_{1,3}, s_{1,3})p_2 = 0$ が成立しなくなる．

$$\mathcal{M} = e^2\, \bar{u}_f \Big[\frac{\not{e}_f^* \not{e}_i \not{p}_1}{2p_2p_1} + \frac{\not{e}_i \not{e}_f^* \not{p}_3}{2p_2p_3} \Big] u_i \tag{III.60}$$

となり，この複素共役をとれば

$$\mathcal{M}^* = e^2\, \bar{u}_i \Big[\frac{\not{p}_1 \not{e}_i^* \not{e}_f}{2p_2p_1} + \frac{\not{p}_3 \not{e}_f \not{e}_i^*}{2p_2p_3} \Big] u_f \tag{III.61}$$

が得られる．以下では，(III.60) 式の $\mathcal{M}$ の右辺第 1 項を $\mathcal{M}_1$，第 2 項を $\mathcal{M}_2$ と記すことにする．

これで $|\mathcal{M}|^2$ を求める準備が出来た．ここでは，入射・散乱電子のスピンについてはそれぞれ平均および和をとるが，光子の偏極については偏極ベクトルの扱い方に慣れるためそのまま残す．但し，簡単のためこの二つのベクトルは共に実であるとする．

$$\begin{aligned}\sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \\ &= e^4\, \mathrm{Tr} \Big(\frac{\not{e}_f \not{e}_i \not{p}_1}{2p_2p_1} + \frac{\not{e}_i \not{e}_f \not{p}_3}{2p_2p_3} \Big)(\not{p}_2 + m)\Big(\frac{\not{p}_1 \not{e}_i \not{e}_f}{2p_2p_1} + \frac{\not{p}_3 \not{e}_f \not{e}_i}{2p_2p_3} \Big)(\not{p}_4 + m)\end{aligned} \tag{III.62}$$

$$\sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^4}{4(p_2p_1)^2} \mathrm{Tr}\, \not{e}_f \not{e}_i \not{p}_1 (\not{p}_2 + m) \not{p}_1 \not{e}_i \not{e}_f (\not{p}_4 + m) \tag{III.63}$$

$$\sum_{s_2,s_4} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = \frac{e^4}{4(p_2p_1)(p_2p_3)} \mathrm{Tr}\, \not{e}_f \not{e}_i \not{p}_1 (\not{p}_2 + m) \not{p}_3 \not{e}_f \not{e}_i (\not{p}_4 + m) \tag{III.64}$$

$$\sum_{s_2,s_4} \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 = \frac{e^4}{4(p_2p_1)(p_2p_3)} \mathrm{Tr}\, \not{e}_i \not{e}_f \not{p}_3 (\not{p}_2 + m) \not{p}_1 \not{e}_i \not{e}_f (\not{p}_4 + m) \tag{III.65}$$

$$\sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}_2|^2 = \frac{e^4}{4(p_2p_3)^2} \mathrm{Tr}\, \not{e}_i \not{e}_f \not{p}_3 (\not{p}_2 + m) \not{p}_3 \not{e}_f \not{e}_i (\not{p}_4 + m) \tag{III.66}$$

まず $\sum |\mathcal{M}_1|^2$ を計算しよう．光子の質量は 0，つまり $\not{p}_1 \not{p}_1 = p_1^2 = 0$ であることを用いると

$$\not{p}_1 (\not{p}_2 + m) \not{p}_1 = \not{p}_1 \not{p}_2 \not{p}_1 + m \not{p}_1 \not{p}_1 = 2(p_1p_2)\not{p}_1 - \not{p}_2 \not{p}_1 \not{p}_1 = 2(p_1p_2)\not{p}_1$$

となる．すると，$\not{p}_4 + m$ の中の m に比例する部分も，奇数個の γ 行列のト

レースということで 0 となる．従って，

$$\sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^4}{2p_2p_1} \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f \not p_4$$

となるが，更に $\not\varepsilon_i \not p_1 = 2\varepsilon_i p_1 - \not p_1 \not\varepsilon_i = -\not p_1 \not\varepsilon_i$ および $\not\varepsilon_i \not\varepsilon_i = -1$ を用いると，結局

$$\sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}_1|^2 = \frac{e^4}{2p_2p_1} \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not p_1 \not\varepsilon_f \not p_4 = \frac{2e^4}{p_2p_1}\left[\, 2(\varepsilon_f p_1)(\varepsilon_f p_4) + (p_1p_4)\,\right]$$

$$= \frac{2e^4}{p_2p_1}\left[\, 2(\varepsilon_f p_1)^2 + (p_2p_3)\,\right] \tag{III.67}$$

次は $\sum |\mathcal{M}_2|^2$ だが，実はこれは上の結果を用いれば簡単に求められる．何故なら，冒頭で与えた不変散乱振幅（III.57）を見ればわかるように，偏極ベクトルが実なら $\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ は $(\varepsilon_i,\ p_1) \Leftrightarrow (\varepsilon_f,\ -p_3)$ という操作で互いに入れ換わるからである．実際に上記の結果（III.67）にこの操作を施して

$$\sum_{s_2,s_4} |\mathcal{M}_2|^2 = -\frac{2e^4}{p_2p_3}\left[\, 2(\varepsilon_i p_3)^2 - (p_1p_2)\,\right] \tag{III.68}$$

を得る．

$\sum \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2$ は $\sum \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^*$ の複素共役だから，残る作業は

$$\sum_{s_2,s_4} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^* = \frac{e^4}{4(p_2p_1)(p_2p_3)} \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_4 + m)$$

の計算である．ここで，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,項 &\equiv \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_4 + m) \\
&= \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_1 + \not p_2 - \not p_3 + m) \\
&= \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_2 + m) \\
&\quad + \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 - \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_3
\end{aligned}$$

Tr(奇数個の γ 行列) $= 0$ を思い出せば

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,項 &= \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_2 + m) \\
&\quad + \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 \not p_2 \not p_3 - \mathrm{Tr}\, \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 \not p_2 \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_3
\end{aligned}$$

更に，$\not p_1 \not\varepsilon_i + \not\varepsilon_i \not p_1 = 0$，$\not p_3 \not\varepsilon_f + \not\varepsilon_f \not p_3 = 0$，$\not p_1 \not\varepsilon_f + \not\varepsilon_f \not p_1 = 2p_1\varepsilon_f$，$\not p_3 \not\varepsilon_i + \not\varepsilon_i \not p_3 = 2p_3\varepsilon_i$，

および $p_{1,3}^2 = 0$ を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,項 &= \mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_1 (\not p_2 + m) \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_2 + m) \\ &\quad - 2(\varepsilon_f p_1)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not p_1 \not p_2 \not p_3 + 2(\varepsilon_i p_3)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_i \not p_1 \not p_2 \not p_3\end{aligned}$$

同様に，第 1 項で $\not p_1 \not p_2 + \not p_2 \not p_1 = 2p_1 p_2$ を使って $\not p_1$ と $\not p_2$ の順序を入れ換え，その後で，上記の関係と $\not p_2 \not\varepsilon_{f,i} + \not\varepsilon_{f,i} \not p_2 = 0$ を繰り返し適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,項 &= 2(p_1p_2)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_2 + \mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (-\not p_2 + m) \not p_1 \not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i (\not p_2 + m) \\ &\quad - 2(\varepsilon_f p_1)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not p_1 \not p_2 \not p_3 + 2(\varepsilon_i p_3)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_i \not p_1 \not p_2 \not p_3 \\ &= 2(p_1p_2)\mathrm{Tr}\,\not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_2 - 2(\varepsilon_f p_1)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not p_1 \not p_2 \not p_3 + 2(\varepsilon_i p_3)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_i \not p_1 \not p_2 \not p_3 \\ &= 2(p_1p_2)[\,2(\varepsilon_i\varepsilon_f)\mathrm{Tr}\,\not p_3 \not\varepsilon_f \not\varepsilon_i \not p_2 - \mathrm{Tr}\,\not p_2 \not p_3\,] \\ &\quad - 2(\varepsilon_f p_1)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_f \not p_1 \not p_2 \not p_3 + 2(\varepsilon_i p_3)\mathrm{Tr}\,\not\varepsilon_i \not p_1 \not p_2 \not p_3 \\ &= 8\Big[\,(p_1p_2)(p_2p_3)[2(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 - 1] + (\varepsilon_i p_3)^2(p_1p_2) - (\varepsilon_f p_1)^2(p_2p_3)\,\Big]\end{aligned}$$

最後に，ここまでの結果を合わせよう：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_4}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{s_2,s_4}\Big(|\mathcal{M}_1|^2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^* + \mathcal{M}_1^*\mathcal{M}_2 + |\mathcal{M}_2|^2\Big) \\ &= \frac{e^4}{p_1p_2}[\,2(\varepsilon_f p_1)^2 + (p_2p_3)\,] - \frac{e^4}{p_2p_3}[\,2(\varepsilon_i p_3)^2 - (p_1p_2)\,] \\ &\quad + \frac{2e^4}{(p_1p_2)(p_2p_3)}\Big[\,(p_1p_2)(p_2p_3)[2(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 - 1] \\ &\qquad + (\varepsilon_i p_3)^2(p_1p_2) - (\varepsilon_f p_1)^2(p_2p_3)\,\Big] \\ &= e^4\Big[\,\frac{p_2p_3}{p_1p_2} + \frac{p_1p_2}{p_2p_3} + 4(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 - 2\,\Big] \qquad \text{(III.69)}\end{aligned}$$

以上の結果を用いれば断面積を導くことが出来る．重心系なら公式 (II.48) を適用するだけなので，ここでは実験室系で考えてみよう．

$$p_2 = (m,\,0,\,0,\,0), \quad p_{1,3} = (|\boldsymbol{p}_{1,3}^{\mathrm{L}}|,\,\boldsymbol{p}_{1,3}^{\mathrm{L}})$$

と置くと

$$\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_4}|\mathcal{M}|^2 = e^4\left[\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|} + \frac{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|} + 4(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 - 2\right] \tag{III.70}$$

実験室系での断面積 $d\sigma/d\Omega_{\mathrm{L}}$ は，重心系での断面積 $d\sigma/d\Omega_{\mathrm{CM}}$ および変換のヤコビアン（Jacobian） $\partial\Omega_{\mathrm{CM}}/\partial\Omega_{\mathrm{L}}(= d\cos\theta_{\mathrm{CM}}/d\cos\theta_{\mathrm{L}})$ から

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{L}}} = \Big(\frac{\partial\Omega_{\mathrm{CM}}}{\partial\Omega_{\mathrm{L}}}\Big)\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{CM}}}$$

と求められる．実験室系は，重心系から見て入射電子と同じ速度で走っている，つまり z 軸負の向きに走っている系である．重心系での電子の速度の大きさは $v = |\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{CM}}|/E_2^{\mathrm{CM}}$ だが，そこでの s と $|\boldsymbol{p}_{1,2}^{\mathrm{CM}}|$ の関係

$$\sqrt{s} = |\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{CM}}|\,(= |\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{CM}}|)\; + E_2^{\mathrm{CM}} = |\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{CM}}| + \sqrt{|\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{CM}}|^2 + m^2}$$

より

$$|\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{CM}}| = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_2^{\mathrm{CM}} = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}}$$

となるから $v = (s - m^2)/(s + m^2)$．従って，両系をつなぐローレンツ変換の β 因子は（自然単位系では）$\beta = -v = -(s - m^2)/(s + m^2)$ となり，これより $\sqrt{1-\beta^2} = 2m\sqrt{s}/(s + m^2)$ が得られる．

ここで，散乱光子の運動量の z 成分（z 軸は入射光子の向き）のローレンツ変換を考える．両系は相対速度（電子速度）が 0 の時に一致する関係なので，付録 1 のローレンツ変換（A.1）がそのまま適用できる（但し，x 成分と z 成分の役割は入れ換える）：

$$(\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}})_z = \frac{(\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{CM}})_z - \beta|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{CM}}|}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

従って，散乱角を θ として

$$|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|\cos\theta_{\mathrm{L}} = \frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{CM}}|}{\sqrt{1-\beta^2}}(\cos\theta_{\mathrm{CM}} - \beta) \tag{III.71}$$

を得る．実験室系では

$$(p_1 - p_3)^2 = -2p_1p_3 = -2|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}||\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|(1-\cos\theta_{\mathrm{L}})$$

$$\begin{aligned}(p_2 - p_4)^2 &= 2m^2 - 2p_2p_4 = 2m^2 - 2p_2(p_1+p_2-p_3)\\ &= -2m(|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}| - |\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|)\end{aligned}$$

だから，$p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ の両辺を 2 乗して

$$|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}| = \frac{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}{1 + |\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|(1-\cos\theta_{\mathrm{L}})/m} \tag{III.72}$$

これを上のローレンツ変換の $|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|$ に代入すると $\cos\theta_{\mathrm{L}}$ と $\cos\theta_{\mathrm{CM}}$ の関係が得られ，それよりヤコビアンが求まる．$|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|$ は，実験室系での s の表現 $s = (p_1+p_2)^2 = m^2 + 2p_1p_2 = m^2 + 2m|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|$ より $|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}| = (s-m^2)/(2m)$ となるので，これを $|\boldsymbol{p}_{1,3}^{\mathrm{CM}}| = (s-m^2)/(2\sqrt{s})$ と共に用いると，最終結果は

$$\frac{d\cos\theta_{\mathrm{CM}}}{d\cos\theta_{\mathrm{L}}} = \frac{s}{m^2}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}\right)^2 \tag{III.73}$$

という形になる．従って，実験室系での微分断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{L}}} = \frac{1}{64\pi^2m^2}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}\right)^2|\mathcal{M}|^2 \tag{III.74}$$

である．電子スピンについての平均・和をとったものを $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$ を用いてあらわに書くと

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{L}}}(\gamma e \to \gamma e) &= \frac{1}{64\pi^2m^2}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}\right)^2\frac{1}{2}\sum_{s_2,s_4}|\mathcal{M}|^2\\ &= \frac{\alpha^2}{4m^2}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}\right)^2\left[\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|} + \frac{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|} + 4(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 - 2\right]\end{aligned} \tag{III.75}$$

これは**クライン**（Klein）**-仁科の式**と呼ばれている．

最後に，光子のスピンについても平均・和をとった式を求めよう．入射光子の横偏極ベクトル $\varepsilon_i(1) = (0,1,0,0)$, $\varepsilon_i(2) = (0,0,1,0)$ をまとめて $(0, \boldsymbol{\varepsilon}_k)$ と，同様に散乱光子のそれも $(0, \boldsymbol{\varepsilon}'_k)$ と書くことにする（$k=1,2$）．これに加えて $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{p}_1/|\boldsymbol{p}_1|$, $\boldsymbol{\varepsilon}'_3 = \boldsymbol{p}_3/|\boldsymbol{p}_3|$ と定義すると，$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)$ および $(\boldsymbol{\varepsilon}'_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_2, \boldsymbol{\varepsilon}'_3)$ は，い

ずれも 3 次元空間の基本単位ベクトルを構成する．これを念頭に置けば

$$
\begin{aligned}
\sum_{s_1,s_3}(\varepsilon_i\varepsilon_f)^2 &= \sum_{k,l=1}^{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}'_l)^2 = \sum_{l=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}'_l\Big[\sum_{k=1}^{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}'_l)\boldsymbol{\varepsilon}_k\Big] \\
&= \sum_{l=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}'_l\Big[\sum_{k=1}^{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}'_l)\boldsymbol{\varepsilon}_k - (\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_l)\boldsymbol{\varepsilon}_3\Big] = \sum_{l=1}^{2}\boldsymbol{\varepsilon}'_l\Big[\boldsymbol{\varepsilon}'_l - (\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_l)\boldsymbol{\varepsilon}_3\Big] \\
&= \sum_{l=1}^{2}\Big[1-(\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_l)^2\Big] = 2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3\sum_{l=1}^{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_l)\boldsymbol{\varepsilon}'_l \\
&= 2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3\Big[\sum_{l=1}^{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_l)\boldsymbol{\varepsilon}'_l - (\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_3)\boldsymbol{\varepsilon}'_3\Big] = 2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3\Big[\boldsymbol{\varepsilon}_3 - (\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_3)\boldsymbol{\varepsilon}'_3\Big] \\
&= 2 - 1 + (\boldsymbol{\varepsilon}_3\boldsymbol{\varepsilon}'_3)^2 = 1 + (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_3/|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_3|)^2 = 1+\cos^2\theta_{\mathrm{L}} \qquad \text{(III.76)}
\end{aligned}
$$

となるので，実光子のスピン自由度は 2 であることも考慮して，求める式は

$$
\frac{d\sigma}{d\Omega_{\mathrm{L}}}(\gamma e \to \gamma e) = \frac{\alpha^2}{2m^2}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}\right)^2\left(\frac{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|} + \frac{|\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{L}}|}{|\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{L}}|} - \sin^2\theta_{\mathrm{L}}\right) \qquad \text{(III.77)}
$$

となる．

4．ミューオン崩壊

不安定粒子の崩壊例として，荷電弱相互作用により起こるミューオン崩壊を考えてみよう．この現象は以前からよく知られており，その崩壊幅はかなりの高精度で測定されている．そのため，電弱標準理論のパラメータ決定においても重要な役割を果たしている．相互作用ラグランジアンとファインマン則は $\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ と同じであり，第 1 近似でのファインマン図は以下のように表される．

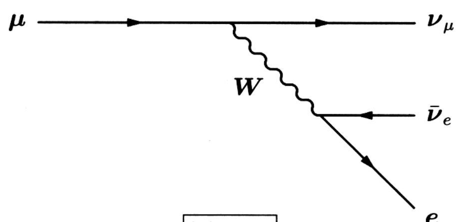


図 III.9

これに対応する不変散乱振幅は

$$\mathcal{M}(\mu \to e\nu_\mu \bar{\nu}_e) = \frac{g^2}{8}\,\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_e, s_e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(\boldsymbol{k}_e, \sigma_e)D_{\mathrm{F}}^{W\,\alpha\beta}(q) \\ \times \bar{u}_\nu(\boldsymbol{k}_\mu, \sigma_\mu)\gamma_\beta(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p}_\mu, s_\mu) \tag{III.78}$$

($q = p_\mu - k_\mu$) と与えられる．容易にわかるように，これは $\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ の振幅とほとんど同じである．ここでもWボソンの伝播関数に対してファインマンゲージを採用すれば $D_{\mathrm{F}}^{W\,\alpha\beta}(q) = g^{\alpha\beta}/(q^2 - M_W^2)$ となるが，$|q^2|$ は最大でも m_μ^2 なので，M_W^2 に比較して無視できる ($M_W = 80.4$ GeV, $m_\mu = 0.106$ GeV)．その結果，上記の振幅は

$$\mathcal{M}(\mu \to e\nu_\mu \bar{\nu}_e) \\ = -\frac{g^2}{8M_W^2}\,\bar{u}_e(\boldsymbol{p}_e, s_e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)v_{\bar{\nu}}(\boldsymbol{k}_e, \sigma_e)\cdot\bar{u}_\nu(\boldsymbol{k}_\mu, \sigma_\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_\mu(\boldsymbol{p}_\mu, s_\mu) \tag{III.79}$$

と少し簡単になる．

以下では，スピンは全て平均・和をとることにしよう．$\sum_{s_\mu, s_e}|\mathcal{M}|^2$ の計算は $\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ の場合と全く同様に実行できるので，要点のみを記す：

$$\begin{aligned}\sum_{s_\mu, s_e}|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{g^4}{64M_W^4}\mathrm{Tr}\,(\not{p}_e + m_e)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\not{k}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5) \\ &\quad \times\mathrm{Tr}\,\not{k}_\mu\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(\not{p}_\mu + m_\mu)\gamma^\beta(1-\gamma_5) \\ &= \frac{g^4}{16M_W^4}\mathrm{Tr}\,(\not{p}_e + m_e)\gamma_\alpha\not{k}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,\mathrm{Tr}\,\not{k}_\mu\gamma^\alpha(\not{p}_\mu + m_\mu)\gamma^\beta(1-\gamma_5) \\ &= \frac{g^4}{16M_W^4}\mathrm{Tr}\,\not{p}_e\gamma_\alpha\not{k}_e\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,\mathrm{Tr}\,\not{k}_\mu\gamma^\alpha\not{p}_\mu\gamma^\beta(1-\gamma_5) \\ &= \frac{g^4}{M_W^4}\Big[\,(p_e)_\alpha(k_e)_\beta + (p_e)_\beta(k_e)_\alpha - g_{\alpha\beta}(p_e k_e) - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\beta}(p_e)^\mu(k_e)^\nu\,\Big] \\ &\quad \times\Big[\,(p_\mu)^\alpha(k_\mu)^\beta + (p_\mu)^\beta(k_\mu)^\alpha - g^{\alpha\beta}(p_\mu k_\mu) + i\varepsilon^{\rho\alpha\sigma\beta}(p_\mu)_\rho(k_\mu)_\sigma\,\Big] \\ &= \frac{4g^4}{M_W^4}(p_e k_\mu)(p_\mu k_e)\end{aligned} \tag{III.80}$$

これより，電子運動量に関する微分崩壊幅は

$$\frac{d\Gamma}{d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_e} = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu (2\pi)^4 \delta^4(p_\mu - p_e - k_\mu - k_e) \frac{g^4}{m_\mu M_W^4}(p_e k_\mu)(p_\mu k_e)$$
$$= \frac{16\pi^4 g^4}{m_\mu M_W^4}(p_e)_\alpha (p_\mu)_\beta \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu (k_\mu)^\alpha (k_e)^\beta \delta^4(p_\mu - p_e - k_\mu - k_e) \tag{III.81}$$

さて，ここで $\nu_\mu e \to \mu\nu_e$ との違いが現れる．つまり，この過程の終状態は 3 体なので，積分がこれまでほど簡単には行えない．一般には，角度・エネルギーについて一つ一つその積分範囲に注意しながら計算を進める必要がある．ところが，この場合には，相対論的共変性を活用した大変スマートな方法があるので，それを示そう．

$k_{e,\mu}$ については積分してしまうのだから，上記の積分（の結果）は $p_\mu - p_e (\equiv l)$ のみに依存する．しかも，その共変性を考えれば

$$A\, l^2 g^{\alpha\beta} + B\, l^\alpha l^\beta = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu (k_\mu)^\alpha (k_e)^\beta \delta^4(l - k_\mu - k_e) \tag{III.82}$$

と置ける．この両辺に $g_{\alpha\beta}$ を掛けて α, β について和をとれば

$$(4A + B)l^2 = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu (k_\mu k_e) \delta^4(l - k_\mu - k_e)$$

ところが $l\,(= p_\mu - p_e) = k_\mu + k_e$ より $k_\mu k_e = l^2/2$ だから，結局

$$2(4A + B) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu \delta^4(l - k_\mu - k_e) \tag{III.83}$$

次に，$g_{\alpha\beta}$ の替りに $l_\alpha l_\beta$ を掛ければ

$$(A + B)(l^2)^2 = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu (k_\mu l)(k_e l) \delta^4(l - k_\mu - k_e)$$

となるが，$k_\mu l = k_\mu(k_\mu + k_e) = k_\mu k_e = l^2/2$，$k_e l = k_e(k_\mu + k_e) = k_\mu k_e = l^2/2$ なので

$$4(A + B) = \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu \delta^4(l - k_\mu - k_e) \tag{III.84}$$

従って，$\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu \delta^4(l-k_\mu-k_e)$ という積分さえ求めればよいことになる．この積分は（ローレンツ）スカラーだから，どのような（慣性）座標系で計算してもよい．そこで，まずはデルタ関数を利用して $\boldsymbol{k}_\mu$ 積分を済ませた後に二つのニュートリノの重心系（$\boldsymbol{k}_e=-\boldsymbol{k}_\mu(\equiv \boldsymbol{k})$, $k_e^0=k_\mu^0(\equiv k^0)$）において残った積分を実行しよう：

$$\begin{aligned}\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu \delta^4(l-k_\mu-k_e) &= \int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}\frac{1}{(2\pi)^3 2k^0}\delta(l^0-2k^0)\\ &= \frac{1}{64\pi^5}\int dk^0\delta(l^0-2k^0)=\frac{1}{128\pi^5}\end{aligned} \tag{III.85}$$

これより（III.83），(III.84）を通じて A, B が決まり，求めたい積分値として

$$\int d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_e d^3\tilde{\boldsymbol{k}}_\mu (k_\mu)^\alpha (k_e)^\beta \delta^4(l-k_\mu-k_e)=\frac{1}{48(2\pi)^5}(l^2 g^{\alpha\beta}+2l^\alpha l^\beta) \tag{III.86}$$

を得る．微分崩壊幅は，この結果を用い

$$\frac{d\varGamma}{d^3\tilde{\boldsymbol{p}}_e}(\mu\to e\nu_\mu\bar{\nu}_e)=\frac{g^4}{96\pi m_\mu M_W^4}\left[\, l^2(p_e p_\mu)+2(lp_e)(lp_\mu)\,\right] \tag{III.87}$$

ここまで来れば，更に $\boldsymbol{p}_e$ 積分を実行して全崩壊幅を求めるのは難しくない．$\boldsymbol{p}_e$ の絶対値は，ν_μ と $\bar{\nu}_e$ が同一方向に走り電子がその反対向きに出るときに最大となる．通常行われるように電子質量も 0 とおくと，この最大値が $m_\mu/2$ となるのは容易に確認できるが，それが $|\boldsymbol{p}_e|$ 積分の上限を与える．角度積分も併せて実行し

$$\varGamma(\mu\to e\nu_\mu\bar{\nu}_e)=\frac{g^4 m_\mu^5}{12(8\pi)^3 M_W^4} \tag{III.88}$$

が得られる．冒頭で述べたように，この量は非常に高い精度で測定されている（平均寿命 $\tau=1/\varGamma=(2.19703\pm0.00004)\times10^{-6}$ 秒）．従って，逆にこの式を通じて g や M_W の値に強い制限が付けられ，電弱理論の検証に役立っている．

5．偏極ビームによる電子・陽電子散乱

ここまでのほとんどの計算における前提とは逆に，入射ビーム内の粒子が全て同じスピン状態にあるならば，断面積はスピン平均という操作なしに計算し

なければならない．ここでは，電子・陽電子散乱を例にとり，その計算の詳細を見ることにしよう．

この場合の散乱断面積は，電子スピノル $u(\boldsymbol{p},s)$，陽電子スピノル $v(\boldsymbol{p},s)$ に対して，射影演算子の公式（II.70）を適用して求められる．特に，現実的な縦偏極（確定したヘリシティの状態）の場合には，電子質量を無視する近似においては公式（II.74）

$$u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s)=\frac{1+h_e\gamma_5}{2}\not{p},\quad v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s)=\frac{1-h_{\bar{e}}\gamma_5}{2}\not{p}$$

が適用される．但し，ここで電子・陽電子のヘリシティをそれぞれ h_e, $h_{\bar{e}}$ $(=\pm1)$ と表した.[♯III.14] これは | 振幅 $|^2$ の計算において $u(\boldsymbol{p},s), v(\boldsymbol{p},s)$ をそれぞれ

$$u(\boldsymbol{p},s)\ \rightarrow\ u'(\boldsymbol{p},s)\equiv\frac{1+h_e\gamma_5}{2}u(\boldsymbol{p},s),\quad v(\boldsymbol{p},s)\ \rightarrow\ v'(\boldsymbol{p},s)\equiv\frac{1-h_{\bar{e}}\gamma_5}{2}v(\boldsymbol{p},s) \tag{III.89}$$

と置き換えた上で，通常のスピン和（平均ではない）をとることと同等である．実際，

$$\begin{aligned}\sum_s u'(\boldsymbol{p},s)\bar{u}'(\boldsymbol{p},s)&=\frac{1}{4}\sum_s(1+h_e\gamma_5)u(\boldsymbol{p},s)\bar{u}(\boldsymbol{p},s)(1-h_e\gamma_5)\\&=\frac{1}{4}(1+h_e\gamma_5)\not{p}(1-h_e\gamma_5)=\frac{1}{2}(1+h_e\gamma_5)\not{p}\\\sum_s v'(\boldsymbol{p},s)\bar{v}'(\boldsymbol{p},s)&=\frac{1}{4}\sum_s(1-h_{\bar{e}}\gamma_5)v(\boldsymbol{p},s)\bar{v}(\boldsymbol{p},s)(1+h_{\bar{e}}\gamma_5)\\&=\frac{1}{4}(1-h_{\bar{e}}\gamma_5)\not{p}(1+h_{\bar{e}}\gamma_5)=\frac{1}{2}(1-h_{\bar{e}}\gamma_5)\not{p}\end{aligned}$$

となり，上に示した質量 0 の場合の射影演算子の公式に一致する．

より具体的に断面積が受ける修正を考えてみよう．例えば

$$\mathcal{M}=\bar{v}\gamma_\mu(A+B\gamma_5)u\cdot\Gamma^\mu$$

という振幅に対して，すでに非偏極断面積 $\sigma_{\rm un}(A,B)$ が得られていたとしよう．

[♯III.14] 例えば $(1-\gamma_5)/2$ は $u(\boldsymbol{p},s)$ からは $h_e=-1$ 成分を，また $v(\boldsymbol{p},s)$ からは $h_{\bar{e}}=+1$ 成分を抜き出す（付録 3 問題 A.6 の 3 参照）．

すると，偏極反応の振幅が上記のルールに従い

$$
\begin{aligned}
&\bar{v}\gamma_\mu(A+B\gamma_5)u \\
&\qquad \Longrightarrow \quad \Big[\,(1-h_{\bar{e}}\gamma_5)v/2\,\Big]^\dagger\gamma^0\gamma_\mu(A+B\gamma_5)\Big[\,(1+h_e\gamma_5)u/2\,\Big] \\
&\qquad\qquad = \bar{v}\gamma_\mu(A'+B'\gamma_5)u
\end{aligned}
$$

但し，

$$
\begin{aligned}
A' &= [\,(1-h_e h_{\bar{e}})A + (h_e - h_{\bar{e}})B\,]/4 \\
B' &= [\,(1-h_e h_{\bar{e}})B + (h_e - h_{\bar{e}})A\,]/4
\end{aligned}
$$

と得られるが，$\sigma_{\rm un}$ はスピン平均をした $\sum|\mathcal{M}|^2/4$ から計算されているのに対し，偏極断面積を求める際にはスピン平均の替りにスピン和をとるのであるから，全体は 4 倍されなければならない：

$$\sigma_{\rm pol}(A,B) = 4\sigma_{\rm un}(A',B')$$

ここで，$|\mathcal{M}|^2$ は A, B についての 2 次式であることを考えると，最終的に

$$\sigma_{\rm pol}(A,B) = \sigma_{\rm un}(A_h,B_h) \tag{III.90}$$

但し

$$A_h \equiv \frac{1}{2}[\,(1-h_e h_{\bar{e}})A + (h_e - h_{\bar{e}})B\,], \quad B_h \equiv \frac{1}{2}[\,(1-h_e h_{\bar{e}})B + (h_e - h_{\bar{e}})A\,]$$

という置き換え規則が得られる．終状態の粒子対の偏極についても，その質量が無視できる場合には類似のルールを導くことが出来る．

ビームの偏極度

さて，すべての電子・陽電子のスピンが完全に揃っているのなら，計算手順はこれで全てだが，実際の実験ではこれを実現するのは不可能と言える．そこで，ビームの**偏極度**（Degree of polarization）という量（単に偏極と呼ばれる

こともある）が導入される．これは，入射粒子の中で，ある軸の向きのスピン成分（の 2 倍）が $s(=\pm 1)$ であるものの割合（個数密度）を ρ_s として

$$P \equiv \frac{\rho_{+1}-\rho_{-1}}{\rho_{+1}+\rho_{-1}} \tag{III.91}$$

と定義される（但し，陽電子ビームの場合には，後で述べるように少し注意が必要）．この定義から明らかなように $0 \leq |P| \leq 1$ である．$P=0$ のビームは**無偏極**（Unpolarized），$P=\pm 1$ は**完全偏極**（Completely polarized），それ以外は**部分偏極**（Partially polarized）という言葉で表され，実際の断面積はこの偏極度を用いて表されることになる．

ここで II.5 で与えた断面積の定義（II.34）式を思い出そう．粒子 1 ＋粒子 2 → 終状態 X という反応の断面積 σ は，粒子 1，2 の個数密度を ρ_1, ρ_2, 両者の相対速度の大きさを $v_{\rm rel}$ とし，反応が体積 V の空間内で，時間 T の間に N 回起こったとして

$$N \equiv VT\rho_1\rho_2\, v_{\rm rel}\, \sigma$$

で決まる．これを縦偏極の電子・陽電子ビームの場合に適用する．それぞれのビームの中の，ヘリシティ $h(=\pm 1)$ の電子・陽電子の密度をそれぞれ ρ_h，$\bar{\rho}_h$ として，ヘリシティ $h_e, h_{\bar{e}}$ の電子と陽電子の衝突の断面積を $\sigma(h_e, h_{\bar{e}})$ と表すと，このビームを用いた時の断面積 σ は，上記の定義より

$$VT\rho\bar{\rho}\, v_{\rm rel}\, \sigma = \sum_{h_e, h_{\bar{e}}=\pm 1} VT\rho_{h_e}\bar{\rho}_{h_{\bar{e}}}\, v_{\rm rel}\, \sigma(h_e, h_{\bar{e}})$$

を満たす．但し，ここで $\rho=\rho_{+1}+\rho_{-1}$，$\bar{\rho}=\bar{\rho}_{+1}+\bar{\rho}_{-1}$ はそれぞれ電子・陽電子全体の密度である．従って，σ は次のように表される：

$$\sigma = \sum_{h_e, h_{\bar{e}}=\pm 1} \frac{\rho_{h_e}}{\rho}\frac{\bar{\rho}_{h_{\bar{e}}}}{\bar{\rho}}\sigma(h_e, h_{\bar{e}})$$

さて，ここで陽電子ビームについて注意を述べておこう．(III.91) に従えば，それぞれのビームの（縦）偏極度 は次式で定義するのが当然のように思える：

$$P_e \equiv \frac{\rho_{+1}-\rho_{-1}}{\rho}, \qquad P_{\bar{e}} \equiv \frac{\bar{\rho}_{+1}-\bar{\rho}_{-1}}{\bar{\rho}} \tag{III.92}$$

ところが，実際には $P_{\bar{e}}$ については右辺にマイナスを付ける流儀もある．常に，それぞれのビームの進む向きを正の向きと考えれば，そのマイナスは不要だが，電子ビームの向きを正の向きとして全体を考えれば，ヘリシティが $+1$ の陽電子のスピンは重心系では負の向きになるから，偏極度の定義（III.91）からマイナス符号が必要という訳である．両方とも実際の文献で使われていてややこしいので，[♯III.15] 定義は明確に述べておく必要がある．ここでは陽電子ビームの偏極度についても（III.92）のようにマイナス符号無しの方式を採用することにする．

このように $P_e, P_{\bar{e}}$ を定義すれば

$$\frac{\rho_{+1}}{\rho} = \frac{1}{2}(1 + P_e), \qquad \frac{\rho_{-1}}{\rho} = \frac{1}{2}(1 - P_e)$$
$$\frac{\bar{\rho}_{+1}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2}(1 + P_{\bar{e}}), \qquad \frac{\bar{\rho}_{-1}}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2}(1 - P_{\bar{e}})$$

となるから，任意の $P_{e,\bar{e}}$ に対する断面積は

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\rho_{+1}}{\rho}\frac{\bar{\rho}_{+1}}{\bar{\rho}}\sigma(+1,+1) + \frac{\rho_{+1}}{\rho}\frac{\bar{\rho}_{-1}}{\bar{\rho}}\sigma(+1,-1) \\ &+ \frac{\rho_{-1}}{\rho}\frac{\bar{\rho}_{+1}}{\bar{\rho}}\sigma(-1,+1) + \frac{\rho_{-1}}{\rho}\frac{\bar{\rho}_{-1}}{\bar{\rho}}\sigma(-1,-1) \\ &= \frac{1}{4}(1 + P_e P_{\bar{e}})[\,\sigma(+1,+1) + \sigma(-1,-1)\,] \\ &+ \frac{1}{4}(P_e + P_{\bar{e}})[\,\sigma(+1,+1) - \sigma(-1,-1)\,] \\ &+ \frac{1}{4}(1 - P_e P_{\bar{e}})[\,\sigma(+1,-1) + \sigma(-1,+1)\,] \\ &+ \frac{1}{4}(P_e - P_{\bar{e}})[\,\sigma(+1,-1) - \sigma(-1,+1)\,] \end{aligned} \tag{III.93}$$

と表せる．無偏極や片方のみ偏極というビーム条件もここに含まれている：

- 偏極していない場合 ($P_e = P_{\bar{e}} = 0$)

$$\sigma = \frac{1}{4}[\,\sigma(+1,+1) + \sigma(-1,-1) + \sigma(+1,-1) + \sigma(-1,+1)\,] \tag{III.94}$$

[♯III.15] 例えばマイナスを付ける定義は Y.S. Tsai, *Phys. Rev.* **D51** (1995), 3172 において，また，付けない定義は A. Blondel, *Phys. Lett.* **B202** (1988), 145 において採用されている．

つまり，よく知られた入射粒子スピンについての平均をとる式が出てくる．

- 電子のみ偏極している場合 ($P_{\bar{e}}=0$)

$$\sigma = \frac{1}{4}[\,\sigma(+1,+1)+\sigma(-1,-1)+\sigma(+1,-1)+\sigma(-1,+1)\,] \\ +\frac{1}{4}P_e[\,\sigma(+1,+1)-\sigma(-1,-1)+\sigma(+1,-1)-\sigma(-1,+1)\,] \quad \text{(III.95)}$$

電子の質量を無視する近似では，相互作用がベクトル型（$=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$），軸性ベクトル型（$=\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$）のみの場合（標準理論など）には，対応する振幅 $\mathcal{M}(h_e,h_{\bar{e}})$ が

$$\mathcal{M}(\pm1,\pm1) = v^\dagger(1\mp\gamma_5)\gamma^0\gamma_\mu(\gamma_5)(1\pm\gamma_5)u/4 \\ = \bar{v}\gamma_\mu(\gamma_5)(1\mp\gamma_5)(1\pm\gamma_5)u/4 = 0$$

を満たすことより

$$\sigma(+1,+1)=\sigma(-1,-1)=0 \quad \text{(III.96)}$$

となるため，また，スカラー型（$=\bar{\psi}\psi$），擬スカラー型（$=\bar{\psi}\gamma_5\psi$），テンソル型（$=\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$）のみの場合には，上の場合と逆に $\mathcal{M}(h_e,h_{\bar{e}})$ が

$$\mathcal{M}(\pm1,\mp1)=0$$

を満たし，

$$\sigma(+1,-1)=\sigma(-1,+1)=0 \quad \text{(III.97)}$$

となることが同様の計算で示せるため，σ の一般式 (III.93) ももっと短くなる．

もし，断面積がヘリシティ h_e, $h_{\bar{e}}$ の部分をあらわに抜き出して

$$\sigma(h_e,h_{\bar{e}}) = a+h_eb+h_{\bar{e}}c+h_eh_{\bar{e}}d \quad \text{(III.98)}$$

（a, b, c, d は h_e, $h_{\bar{e}}$ を含まない）と表されているなら

$$\sigma(+1,+1)=a+b+c+d, \quad \sigma(+1,-1)=a+b-c-d, \\ \sigma(-1,+1)=a-b+c-d, \quad \sigma(-1,-1)=a-b-c+d$$

なので，これを前述の P_e, $P_{\bar{e}}$ を使った式に代入すると

$$\sigma(P_e, P_{\bar{e}}) = a + P_e b + P_{\bar{e}} c + P_e P_{\bar{e}} d \tag{III.99}$$

となる．つまりは，$h_e, h_{\bar{e}}$ を含めて σ を計算し，h_e^2 や $h_{\bar{e}}^2$ は全て 1 とおいた結果において $h_e \to P_e$, $h_{\bar{e}} \to P_{\bar{e}}$ と置き換えれば最終結果に達する訳である．

6．偏極ディラック粒子対生成

最後に，$e\bar{e} \to f\bar{f}$ において，終状態のディラック粒子対 $f\bar{f}$ が偏極している場合の微分断面積を与えよう．一応 f としては電荷が $Q_f = +(2/3)e$ のクォークを想定するが，$Q_f = -(1/3)e$ のクォークや $Q_l = -e$ のレプトンの場合向けに書き直すことは容易である．関与するのは電磁相互作用および中性弱相互作用であり，相互作用ラグランジアンは電弱標準理論により

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = &\sum_{i=e,f} Q_i \ :\bar{\psi}_i(x)\gamma_\alpha\psi_i(x):\ A^\alpha(x) \\ &+ \sum_{i=e,f} :\bar{\psi}_i(x)\gamma_\alpha(A_i + B_i\gamma_5)\psi_i(x):\ Z^\alpha(x)\end{aligned} \tag{III.100}$$

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{-g}{4\cos\theta_W}(1 - 4\sin^2\theta_W), \quad & B_e &= \frac{g}{4\cos\theta_W} \\ A_f &= \frac{g}{4\cos\theta_W}(1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W), \quad & B_f &= \frac{-g}{4\cos\theta_W} \end{aligned}$$

と与えられる．但し，θ_W はワインバーグ角（Weinberg angle）と呼ばれるパラメータで，種々の実験から $\sin^2\theta_W \simeq 0.23$ ということが知られている．また，$\sum_i :\bar{\psi}_i\gamma_\alpha(A_i + B_i\gamma_5)\psi_i:$ から $g/(4\cos\theta_W)$ を除いた部分は J_α^{NC} と書かれ，**中性弱カレント**（Neutral weak current）と呼ばれている．このカレントに結合する Z は，$\mathrm{W}^\pm$ よりも更に重く M_Z =91.2 GeV である．

この中性弱相互作用についてのファインマン則は

- 内部（中間状態）を走る Z ボソンには Z ボソン伝播関数　$D_{\mathrm{F}}^{Z\,\alpha\beta}(q)$

を，また，

- ディラック粒子とＺボソン（Z^α）の結合部（頂点）には　$\gamma_\alpha(A_i + B_i\gamma_5)$ を対応させる．

となることは直ちに確認できるだろう．

この過程を表すファインマン図は以下の通りで，♯ III.16

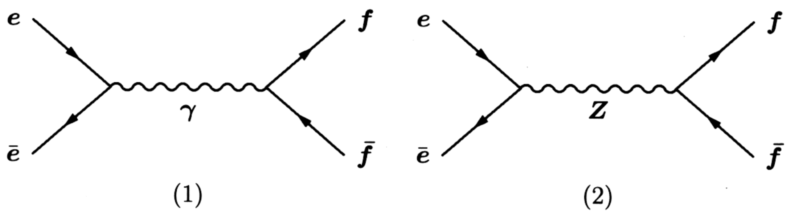


図 III.10

対応する不変散乱振幅は

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(e\bar{e} \to f\bar{f}) &= C_{VV}\, \bar{v}_e(\boldsymbol{p}_{\bar{e}}, s_{\bar{e}})\gamma_\alpha u_e(\boldsymbol{p}_e, s_e) \cdot \bar{u}_f(\boldsymbol{p}_f, s_f)\gamma^\alpha v_f(\boldsymbol{p}_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \\ &+ C_{VA}\, \bar{v}_e(\boldsymbol{p}_{\bar{e}}, s_{\bar{e}})\gamma_\alpha u_e(\boldsymbol{p}_e, s_e) \cdot \bar{u}_f(\boldsymbol{p}_f, s_f)\gamma^\alpha\gamma_5 v_f(\boldsymbol{p}_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \\ &+ C_{AV}\, \bar{v}_e(\boldsymbol{p}_{\bar{e}}, s_{\bar{e}})\gamma_\alpha\gamma_5 u_e(\boldsymbol{p}_e, s_e) \cdot \bar{u}_f(\boldsymbol{p}_f, s_f)\gamma^\alpha v_f(\boldsymbol{p}_{\bar{f}}, s_{\bar{f}}) \\ &+ C_{AA}\, \bar{v}_e(\boldsymbol{p}_{\bar{e}}, s_{\bar{e}})\gamma_\alpha\gamma_5 u_e(\boldsymbol{p}_e, s_e) \cdot \bar{u}_f(\boldsymbol{p}_f, s_f)\gamma^\alpha\gamma_5 v_f(\boldsymbol{p}_{\bar{f}}, s_{\bar{f}})\end{aligned} \tag{III.101}$$

と整理できる．但し，各項の係数は，$s \equiv (p_e + p_{\bar{e}})^2$ とおいて

$$\begin{aligned}C_{VV} &= \frac{1}{s}Q_eQ_f + \frac{1}{s-M_Z^2}A_eA_f, \qquad & C_{VA} &= \frac{1}{s-M_Z^2}A_eB_f, \\ C_{AV} &= \frac{1}{s-M_Z^2}B_eA_f, & C_{AA} &= \frac{1}{s-M_Z^2}B_eB_f\end{aligned} \tag{III.102}$$

で与えられる．

♯ III.16 $f =$ 電子の場合には，図 III.5 (2) およびその図の中の光子をＺボソンで置き換えた図も加えなければならない．

あとは通常の計算を進めていくのみだが，少々面倒ではある．しかし，ここまでのテクニックが身についていれば，後は粘りさえあれば実行できるはずである．これまでの例ではもの足らないと感じている読者は，是非以下の計算を自身で実行してみて欲しい．式が長くなりすぎないよう電子・陽電子の偏極は後から含めることにして，まずは重心系において $f\bar{f}$ のみがスピンベクトル s_f, $s_{\bar{f}}$ を保っている場合の微分断面積を示す：

$$\begin{aligned}
&\frac{d\sigma}{d\Omega}(e\bar{e} \to f\bar{f}) \\
&= \frac{3\beta}{256\pi^2 s} \Big[\ D_V \left[\ \{4m_f^2 s + (lq)^2\}(1 - s_f s_{\bar{f}}) + s^2(1 + s_f s_{\bar{f}}) \right. \\
&\qquad\qquad \left. +2s(ls_f\, ls_{\bar{f}} - Ps_f\, Ps_{\bar{f}}) + 2\, lq(ls_f\, Ps_{\bar{f}} - ls_{\bar{f}}\, Ps_f)\,\right] \\
&\qquad + D_A \left[\,(lq)^2(1 + s_f s_{\bar{f}}) - (4m_f^2 s - s^2)(1 - s_f s_{\bar{f}}) \right. \\
&\qquad\qquad \left. -2(s - 4m_f^2)(ls_f\, ls_{\bar{f}} - Ps_f\, Ps_{\bar{f}}) - 2\, lq(ls_f\, Ps_{\bar{f}} - ls_{\bar{f}}\, Ps_f)\,\right] \\
&\qquad +4\,\mathrm{Re}(D_{VA})\, m_f \left[\, s(Ps_f - Ps_{\bar{f}}) + lq(ls_f + ls_{\bar{f}})\,\right] \\
&\qquad -2\,\mathrm{Im}(D_{VA}) \left[\, lq\,\epsilon(s_f, s_{\bar{f}}, q, l) + ls_{\bar{f}}\epsilon(s_f, P, q, l) + ls_f\epsilon(s_{\bar{f}}, P, q, l)\,\right] \\
&\qquad -4\,E_V\, m_f s(ls_f + ls_{\bar{f}}) - 4\,E_A\, m_f\, lq(Ps_f - Ps_{\bar{f}}) \\
&\qquad +4\,\mathrm{Re}(E_{VA}) \left[\, 2m_f^2(ls_f\, Ps_{\bar{f}} - ls_{\bar{f}}\, Ps_f) - lq\, s\,\right] \\
&\qquad +4\,\mathrm{Im}(E_{VA})\, m_f \left[\, \epsilon(s_f, P, q, l) + \epsilon(s_{\bar{f}}, P, q, l)\,\right]\ \Big] \qquad \text{(III.103)}
\end{aligned}$$

ここで $\beta \equiv \sqrt{1 - 4m_f^2/s}$, $P \equiv p_e + p_{\bar{e}}\ (= p_f + p_{\bar{f}})$, $l \equiv p_e - p_{\bar{e}}$, $q \equiv p_f - p_{\bar{f}}$, $\epsilon(a, b, c, d) \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$ であり，更に

$$\begin{aligned}
&D_V = |C_{VV}|^2 + |C_{AV}|^2, \qquad D_A = |C_{VA}|^2 + |C_{AA}|^2, \\
&D_{VA} = C_{VV}^* C_{VA} + C_{AV}^* C_{AA}, \\
&E_V = 2\,\mathrm{Re}(C_{AV}^* C_{VV}), \qquad E_A = 2\,\mathrm{Re}(C_{AA}^* C_{VA}), \\
&E_{VA} = C_{VV}^* C_{AA} + C_{AV}^* C_{VA} \qquad \text{(III.104)}
\end{aligned}$$

と置いた．但し，実際には $C_{ij}\ (i, j = V, A)$ はここでは全て実数である．また，

β の前の 3 という因子は，クォークが**カラー**（Color）と呼ばれる三つの自由度を持つことから来ている．

この結果に電子・陽電子の偏極の効果を取り入れるのは容易である．まず，(III.89) 式に従い，散乱振幅 (III.101) の中で

$$u_e \quad \rightarrow \quad \frac{1+h_e\gamma_5}{2}u_e, \qquad v_e \quad \rightarrow \quad \frac{1-h_{\bar{e}}\gamma_5}{2}v_e$$

と置き換え，次に，全体が（$|\mathcal{M}|^2$ の段階で）4 倍されることを考慮する．これは，$\mathcal{M}(e\bar{e} \rightarrow f\bar{f})$ の中の各項の係数 C_{Vi}, C_{Ai}（$i = V, A$）を

$$C_{Vi} \quad \rightarrow \quad \frac{1-h_e h_{\bar{e}}}{2}C_{Vi} + \frac{h_e - h_{\bar{e}}}{2}C_{Ai} \tag{III.105}$$

$$C_{Ai} \quad \rightarrow \quad \frac{1-h_e h_{\bar{e}}}{2}C_{Ai} + \frac{h_e - h_{\bar{e}}}{2}C_{Vi} \tag{III.106}$$

と置き換えることに相当する．これを，上記の $D_{V,A,VA}, E_{V,A,VA}$ の定義 (III.104) に代入し，$h^2_{e,\bar{e}}$ は全て 1 と置いた後で最後に残った h_e，$h_{\bar{e}}$ をそれぞれ P_e，$P_{\bar{e}}$ とすれば最終結果が得られる．具体的な作業は読者に任せよう．

おしまいに，Z ボソンが関与する反応を扱ったこの機会に，電弱標準理論におけるこのボソンの歴史的な役割について簡単に紹介しておこう．荷電弱相互作用の存在は，中性子のベータ崩壊などを通じてずっと昔からよく知られていた．更に，それが光子のような媒介粒子により引き起こされるという可能性も，以前から調べられていた．これに比べると Z ボソンの登場はむしろ“最近”と言える．すなわち，電弱標準理論は，この荷電弱相互作用と電磁相互作用の統一的な記述を目指す模型として 1960 年代に提案されたのだが，Z ボソン媒介による中性弱相互作用は，その中に必然的に含まれる全く新しい相互作用として予言されたのである．但し，この模型の登場以降，精力的な中性弱相互作用探しが始まったのだが，はじめのうちは否定的なデータばかりが報告され，この模型とは別に，電磁・荷電弱相互作用だけを含むように工夫を施した模型が提案されたりもした．しかし，このような混乱もあったものの，1973 年ついにこ

の新相互作用による反応は観測され，これにより電弱標準模型が現実的な理論としても認められた．その後，高エネルギー加速器の飛躍的な進歩により，直接WおよびZボソン自体が生成されるようになり現在に至っている．今や，非常に正確に測定されている両ボソンの質量は，微細構造定数 α やミューオン崩壊幅（通常はフェルミ結合定数 G_F として表される）と並ぶ重要な物理定数である．

♠♠ ちょっと息抜き： 続・摂動計算は辛いよ ♠♠

手計算を学ぶ前の小学生に電卓を教えることの是非は，大いに議論のあるところだが，最近ではコンピュータによるファインマン図の評価も可能になってきているため，大学院生の勉強にも似たような問題が起こる可能性がある．一旦コンピュータによる計算を知ってしまえば，ペンを持っての計算などやる気が失せてしまうという訳である．実は，筆者も初めて FORM という自動計算システムを使った時に，この禁断の実（？）を味わってしまった．しかも，この体験は，自分が大学時代に所属していたボート部のコーチの言葉まで思い出させた（…「ボート部のコーチが場の量子論を教えるだと !?」などと早とちりしないように）．ある日，彼が別のクルーのコーチのためにモーターボートで水上に出ようとしていた時に，いっしょに乗せて欲しいと頼んでみたところ,「アカン」という冷たい返事．で，その理由だが「おまえは現役の漕ぎ屋やろ．だからダメなんや．漕ぎ屋がモーターボートのスピードを味わったら，もう必死に漕ぐ気がしなくなるやないか」という説明だった．正に,「手計算」と「コンピュータ計算」の関係やないか！

ともかく，これからはコンピュータ計算が主流になるだろう．なら，我々がこれまで味わったような苦労も「今は昔」の話だろうか．う～ん，残念ながらそれはまだ違うだろう．コンピュータに計算させるといっても，そのプログラムを組むのは我々人間なんだから．それに，場の量子論の基礎自体が怪しかったら，まともなプログラムも組めないからしっかり勉強しよう．

♣♣♣♣

付録1　ローレンツ変換と共変・反変ベクトル

本文中では，**特殊相対論**（Special relativity）の基本的な事項は既知のこととして話を進めたが，時間座標に虚数単位 i を含める形式で勉強してきた読者は，**共変・反変ベクトル** の概念には不慣れかも知れないので，ここで要点をまとめておこう．

特殊相対論は，**4次元ミンコフスキー時空**（Minkowski space-time）上で定式化される．そこでは，〔時間座標 t と空間座標 $\boldsymbol{x}$〕や〔エネルギー E と運動量 $\boldsymbol{p}$〕 はまとめて**4元ベクトル**として扱われ，異なる慣性系の間は**ローレンツ変換**で結ばれる．よく教科書で例として扱われる一番簡単なローレンツ変換は，一つの慣性系（S系）とそれに対して x 軸正の向きに一定の速さ β で運動する別の慣性系（S' 系）の間のものである．但し，ここでS系とS' 系はある瞬間に完全に重なっており，かつ，その瞬間の原点での時刻が共に0であるように，両系の時間軸が調節されているものとする．要するに，両者は相対速度が x 軸の向きで，かつ，この相対速度が0の時に同一になるような関係である．この場合には，例えば時空点についてのこの変換は，同じ点のS系とS' 系での座標をそれぞれ (t,x,y,z), (t',x',y',z') とし，$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$ と置いて

$$t' = \gamma(t-\beta x), \quad x' = \gamma(x-\beta t), \quad y' = y, \quad z' = z \tag{A.1}$$

で与えられる．或いは，これを行列形式で表現すると

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

となる．

以後，$x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$, $x^3 \equiv z$ という記法を採用することにして，一般のローレンツ変換を<u>取り敢えず</u> $x'^a = \sum_{b=0}^{3} \alpha^{ab} x^b$ と表しておく．さて，こ

の 4 次元時空においては，二つのベクトルの内積はどのように定義すればよいだろうか．3 次元空間の場合には，二つのベクトルの対応する成分同士を掛け合わせその和をとるのが内積であり，これは任意の座標軸回転の下で不変だった．ところが，4 次元時空では，二つの 4 元ベクトル $A^a = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, $B^a = (B^0, B^1, B^2, B^3)$ に対して $\sum_{a=0}^{3} A^a B^a$ という組み合わせを作ってもローレンツ不変にはならない．

問題 A.1　一番簡単なローレンツ変換（A.1）の場合について，これを確かめてみよ．

一方，

$$A^0B^0 - A^1B^1 - A^2B^2 - A^3B^3 \tag{A.3}$$

という組み合わせはローレンツ変換の下で不変であることが知られている．

問題 A.2　これについても同様にローレンツ変換（A.1）を用いて確かめよ．

そこで，この組み合わせを 4 次元時空におけるベクトルの内積と定義しよう．この内積を，3 次元空間の場合と同じように対応する成分同士の積の和の形で表すには，$\bar{A}^a = (\bar{A}^0, \bar{A}^1, \bar{A}^2, \bar{A}^3) \equiv (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$ とでも書いて（或いは，同じ方法で B^a に対して $\bar{B}^a$ を定義して）$AB = \sum_{\mu=0}^{3} \bar{A}^\mu B^\mu \,(= \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu \bar{B}^\mu)$ とするしかないが，この時，$\bar{A}'^a = \sum_{b=0}^{3} \alpha^{ab} \bar{A}^b$ とはならない．実際，この式が正しいなら，変換（A.1）の場合にはその第 0 成分は $\bar{A}'^0 = \gamma(\bar{A}^0 - \beta \bar{A}^1)$ となるはずだが，この両辺をバーのない成分で表した式 $A'^0 = \gamma(A^0 + \beta A^1)$ は A^a の満たす変換式

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1)$$

とは食い違う．

従って，A^a と $\bar{A}^a$ は異なる変換性を持つ．そこで，このことを明示するため A^a と $\bar{A}^a$ を改めて

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

と表し，前者をベクトル A の**反変**（Contravariant）成分（或いは反変ベクトル），後者を**共変**（Covariant）成分（或いは共変ベクトル）と呼ぶ（その理由については後で述べる）．このとき，内積は次のように書くことが出来る：

$$AB = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$$

但し，ここで「上下に同じ文字が現れた場合には，それについての和をとる」という相対論での習慣，いわゆるアインシュタイン（Einstein）の規約，に従い $\sum_{\mu=0}^{3}$ を省略した（以下同様）．

ここでわかったことは

$$A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$$

であるが，上で述べたように

$$\sum_{\mu=0}^{3} A'^\mu B'^\mu \neq \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B^\mu$$

つまり，上付き添字（または下付き添字）を持つ量同士の積を足し上げてもローレンツ変換の下で不変な組み合わせにはならないが，上付き添字と下付き添字の量からなら不変な量が得られるということである．これは，相対論における計算で非常に重要な意味を持つ．そこでこの点を考えて，これからはベクトル A の反変成分に対する一般のローレンツ変換を

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \tag{A.4}$$

と表すことにする．

このように導入された内積は，$g_{\mu\nu}\ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ という記号を用いて $AB = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ と表すことも出来る．ここで $g_{\mu\nu}$ は**計量テンソル**（Metric tensor）と呼ばれ，$g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ かつ $\mu \neq \nu$ の時 $g_{\mu\nu} = 0$ という成分を持つ．すると，$AB = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu} B^\mu A^\nu = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$ だから，A や B の共変成分はその反変成分より

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu$$

と得ることが出来る．同様に，$g^{00}=1, g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1$，これ以外の成分は全て 0 という記号 $g^{\mu\nu}$（これも計量テンソルと呼ばれる）を導入すれば，内積は $g^{\mu\nu}A_\mu B_\nu$ と書くことも出来，その結果，$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu, B^\mu = g^{\mu\nu}B_\nu$ も成り立つ．つまり，計量テンソルを用いると添字の上げ下げが出来るのである．

ここで，共変成分が従う変換則を調べておこう．この変換を

$$A'_\mu = \bar{\Lambda}_\mu{}^\nu A_\nu \tag{A.5}$$

と表し，(A.4) 式と共に $A'^\mu B'_\mu = A^\mu B_\mu$ に代入してみると $\Lambda^\mu{}_\rho \bar{\Lambda}_\mu{}^\sigma A^\rho B_\sigma = A^\mu B_\mu$ となる．これは $\Lambda^\mu{}_\rho \bar{\Lambda}_\mu{}^\sigma = \delta_\rho{}^\sigma$ を意味するが，この両辺に Λ の逆変換 Λ^{-1} を作用させれば $\Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \bar{\Lambda}_\mu{}^\sigma = (\Lambda\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \bar{\Lambda}_\mu{}^\sigma = \delta^\mu{}_\nu \bar{\Lambda}_\mu{}^\sigma = \bar{\Lambda}_\nu{}^\sigma, \delta_\rho{}^\sigma (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\nu$ より

$$\bar{\Lambda}_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \tag{A.6}$$

つまり，共変成分は反変成分と逆の変換 (Λ^{-1}) を受けることがわかる．

なぜ共変・反変と呼ばれるか

共変·反変ベクトルについては，これだけ知っていれば基本的知識としては十分だが，補足として，何故こんな名前が付いているのかについて簡単に説明しておこう．まず，通常の 3 次元のベクトルを扱う時のように，各軸方向の基本単位ベクトルを導入する．これを $\boldsymbol{e}(\mu)(\mu=0,1,2,3)$ と書こう．すると，この 4 次元時空内での任意の 4 元ベクトル $\boldsymbol{u}$ は，その反変成分 u^μ を用いて $\boldsymbol{u}=\sum_{\mu=0}^{3} u^\mu \boldsymbol{e}(\mu)$ と表されることになる．♯A.1 さて，この式で，左辺のベクトル $\boldsymbol{u}$ は座標軸とは無関係に存在する量だから，どんな慣性系から見ても $\boldsymbol{u}$ である．しかし，当然のことながら，異なる系ではその成分は一般には異なる値をとるし，また，$\boldsymbol{e}(\mu)$ という四つのベクトルは，ベクトルとは言っても $\boldsymbol{u}$ とは違い，各座標軸と同じ向きのベクトルとして定義されるので，座標軸が動けばそれと共に $\boldsymbol{e}(\mu) \to \boldsymbol{e}'(\mu)$ と動く．ところが，$\boldsymbol{e}'(\mu)$ と $\boldsymbol{e}(\mu)$ の関係は u'^μ と u^μ の関係と同じではあり得

♯A.1 特殊相対論での 4 元ベクトルは，3 次元のベクトルとは違って太文字では書かないのが普通だが，ここではベクトルそのものとその成分を明確に区別するためこのように書く．

ない．何故なら，上に述べた理由で $\sum_{\mu=0}^{3} u'^{\mu}\boldsymbol{e}'(\mu) = \sum_{\mu=0}^{3} u^{\mu}\boldsymbol{e}(\mu)$ でなければならないのに，もし $\boldsymbol{e}(\mu)$ の変換性が $u'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}$ と同じだとすると，内積のところで見たようにそれが成り立たなくなるからである．ここまで来ればおわかりかと思うが，$\boldsymbol{e}(\mu)$ は u_{μ} と同じ変換則に従うのである．実際，それならば

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\mu=0}^{3} u^{\mu}\boldsymbol{e}(\mu) = \sum_{\mu=0}^{3} u'^{\mu}\boldsymbol{e}'(\mu)$$

が，内積の不変性と同じ理由で成立する．そして，これが共変・反変という名前の由来でもある： A_{μ} は基本単位ベクトルと同じように（“共に”）変換されるので共変成分と呼ばれ，A^{μ} はそれと反対の変換を受けるので反変成分と呼ばれるという訳である．

付録 2 ウィックの定理

実際の摂動計算において，重要な役割を果たすのが**ウィックの定理**である．これは，一口で言えば「**場の演算子の時間順序積は，それらの演算子から構成される全ての可能な正規積と伝播関数の積の和で表される**」というもので，n 個の演算子 $\phi(x_i)$ $(i = 1 \sim n)$ の場合を式で表せば次のようになる：

$$\mathrm{T}\Big[\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i)\Big] = \sum_{E_n}\Big[\sum_{\substack{\{\mathrm{pair}\}\\(\mathrm{in}\ E_n)}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle :\prod_{k\in E_n^c}\phi(x_k):\Big] \qquad \text{(A.7)}$$

ここで，E_n は 1, 2, $\cdots$, n を元とする集合 $\Omega_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ の任意の部分集合のうちで偶数個の元を持つもの，E_n^c はその補集合であり，$\sum_{E_n}$ は全ての E_n についての和である．例えば，$E_n = \{\phi\}$（空集合）なら $E_n^c = \Omega_n$ であり，$E_n = \{1, n\}$ なら $E_n^c = \{2,\ 3,\ \cdots\ n-1\}$ である（n が偶数なら $E_n = \Omega_n$ の場合もあるが，n が奇数なら $E_n = \Omega_n$ は当然ありえない）．また，$\sum_{\substack{\{\mathrm{pair}\}\\(\mathrm{in}\ E_n)}}$ は E_n の元を二つずつのペアにする全ての可能な組み合わせについての和で，$\prod_{\{i<j\}}$ は与えられた組み合わせの中の全てのペアの積を表す．但し，

$E_n = \{\phi\}$ なら $[\,\sum_{\text{pair}} \prod_{\{i<j\}} \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\,] = 1$,

$E_n = \{\Omega_n\}$ なら $:\prod_k \phi(x_k): = 1$

と約束しておく．例えば，$E_n = \{1, 2, 3, 4\}$ なら，可能なペアの組み合わせは (1) $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, (2) $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, (3) $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$ の 3 通りある．なお，ここでは簡単のためボーズ演算子について考えているが，フェルミ演算子なら各項の前に（左辺の順序から右辺の順序にするために）何回演算子の順序交換をしたかを表す符号因子（偶数回なら＋，奇数回なら－）が掛かることになる．

具体的に $n = 2$, 3 の場合を書き表してみよう．

n=2

この場合は $\Omega_2 = \{1,\ 2\}$ だから $E_2 = \{\phi\}$, $\{1,\ 2\}$ である．従って

$$\mathrm{T}[\,\phi(x_1)\phi(x_2)\,] = :\phi(x_1)\phi(x_2): + \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$$

左辺と右辺の演算子の順序を見比べたらわかるように，この場合にはフェルミ演算子でも符号は同じである．

n=3

こんどは $\Omega_3 = \{1,\ 2,\ 3\}$ で $E_3 = \{\phi\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$ である．従って

$$\begin{aligned}\mathrm{T}[\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\,] = {}& :\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3): + \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\,\phi(x_3)\\ &+ \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_1)\phi(x_3)|0\rangle\,\phi(x_2) + \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle\,\phi(x_1)\end{aligned}$$

こんどはフェルミ演算子なら右辺第 3 項の符号が変わることは明らかだろう．

問題 A.3　$n = 4$ の場合について同様の式を書け．

以下でこの定理の証明を与えよう．その準備として，まずは n 個の場の演算子 $\phi(x_i)$ の正規積を，それぞれの生成演算子部分 $\phi^{(c)}(x_i)$ と消滅演算子部分 $\phi^{(a)}(x_i)$ の積として表すことから始める．Ω_n の任意の部分集合（元の数は偶数でも奇数でもよい）を P_n，その補集合を P_n^c で表すことにする．こんどは n の

偶奇に関わらず $P_n = \Omega_n$ もある．すると，その正規積は

$$:\prod_{i=1}^{n} \phi(x_i): = \sum_{P_n} \Big[\prod_{i \in P_n} \phi^{(c)}(x_i) \prod_{j \in P_n^c} \phi^{(a)}(x_j) \Big] \tag{A.8}$$

と表される．但し，ここで $\sum_{P_n}$ は Ω_n の全ての P_n についての和である．また，フェルミ演算子ならやはり各項の前に符号因子が掛かる．

問題 A.4　上の公式が成り立つことを $n=2, n=3$ の場合について確かめよ．

さて，本題の証明には数学的帰納法を用いる．$n=2$ の場合についての証明は容易なのでここでは省略し，n の場合の式から $n+1$ の式が導かれることを示そう．時間順序積の中では演算子の順序は自由に変えられるから（フェルミ演算子の場合には符号因子に注意する必要があるが），x_i $(i = 1 \sim n+1)$ の中で x_{n+1}^0 が最も早い時間である，つまり x_i^0 $(i = 1 \sim n) > x_{n+1}^0$ と仮定しても，一般性は失われない．この場合には

$$\mathrm{T} \Big[\prod_{i=1}^{n+1} \phi(x_i) \Big] = \mathrm{T} \Big[\prod_{i=1}^{n} \phi(x_i) \Big] \phi(x_{n+1})$$

であるが，帰納法の仮定により $\mathrm{T}\Big[\prod_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Big]$ は，すでに正規積と伝播関数の組み合わせとして (A.7) のように表されている．ここで，$\phi(x_{n+1})$ も $\phi^{(c)}(x_{n+1}) + \phi^{(a)}(x_{n+1})$ と分解し，これが $:\phi(x_1) \cdots \phi(x_n):$ に右から掛かったらどうなるかを調べてみる：

$$\begin{aligned} \Big[:\prod_{i=1}^{n} \phi(x_i): \Big] \phi(x_{n+1}) &= \sum_{P_n} \Big[\prod_{i \in P_n} \phi^{(c)}(x_i) \prod_{j \in P_n^c} \phi^{(a)}(x_j) \Big] \phi^{(c)}(x_{n+1}) \\ &+ \sum_{P_n} \Big[\prod_{i \in P_n} \phi^{(c)}(x_i) \prod_{j \in P_n^c} \phi^{(a)}(x_j) \Big] \phi^{(a)}(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{A.9}$$

この右辺第 1 項で，$\phi^{(c)}(x_{n+1})$ を，どんどん左の方へ動かしていくとどうなるだろうか．より正確に式変形を表すために，$\displaystyle\sum_{P_n} \Big[\prod_{i \in P_n} \phi^{(c)}(x_i) \prod_{j \in P_n^c} \phi^{(a)}(x_j) \Big]$ を

$\phi^{(c)}(x_n)$ を含む部分と $\phi^{(a)}(x_n)$ を含む部分に分けると

$$\begin{aligned}(\mathrm{A.9})\ 第1項 &= \sum_{P_n}\Big[\prod_{i\in P_n}\phi^{(c)}(x_i)\prod_{j\in P_n^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\phi^{(c)}(x_{n+1})\\ &= \sum_{P_{n-1}}\Big[\prod_{i\in P_{n-1}}\phi^{(c)}(x_i)\Big]\phi^{(c)}(x_n)\Big[\prod_{j\in P_{n-1}^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\phi^{(c)}(x_{n+1})\\ &+ \sum_{P_{n-1}}\Big[\prod_{i\in P_{n-1}}\phi^{(c)}(x_i)\Big]\Big[\prod_{j\in P_{n-1}^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\phi^{(a)}(x_n)\phi^{(c)}(x_{n+1})\end{aligned}$$

ここで，

$$\phi^{(a)}(x_n)\phi^{(c)}(x_{n+1}) = [\,\phi^{(a)}(x_n),\ \phi^{(c)}(x_{n+1})\,] + \phi^{(c)}(x_{n+1})\phi^{(a)}(x_n)$$

だが，一方 $x_i^0\ (i=1\sim n) > x_{n+1}^0$ と仮定しているので

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_n)\phi(x_{n+1})|0\rangle = \langle 0|\phi(x_n)\phi(x_{n+1})|0\rangle = \langle 0|\phi^{(a)}(x_n)\phi^{(c)}(x_{n+1})|0\rangle\\ &= \langle 0|[\,\phi^{(a)}(x_n),\ \phi^{(c)}(x_{n+1})\,]|0\rangle = [\,\phi^{(a)}(x_n),\ \phi^{(c)}(x_{n+1})\,]\langle 0|0\rangle\\ &= [\,\phi^{(a)}(x_n),\ \phi^{(c)}(x_{n+1})\,]\end{aligned}$$

従って，

$$\phi^{(a)}(x_n)\phi^{(c)}(x_{n+1}) = \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_n)\phi(x_{n+1})|0\rangle + \phi^{(c)}(x_{n+1})\phi^{(a)}(x_n)$$

より

$$\begin{aligned}(\mathrm{A.9})\ 第1項 &= \sum_{P_{n-1}}\Big[\prod_{i\in P_{n-1}}\phi^{(c)}(x_i)\Big]\phi^{(c)}(x_n)\Big[\prod_{j\in P_{n-1}^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\phi^{(c)}(x_{n+1})\\ &+ \sum_{P_{n-1}}\Big[\prod_{i\in P_{n-1}}\phi^{(c)}(x_i)\Big]\Big[\prod_{j\in P_{n-1}^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\phi^{(c)}(x_{n+1})\phi^{(a)}(x_n)\\ &+ \sum_{P_{n-1}}\Big[\prod_{i\in P_{n-1}}\phi^{(c)}(x_i)\Big]\Big[\prod_{j\in P_{n-1}^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_n)\phi(x_{n+1})|0\rangle\end{aligned}$$

ここで，$:\phi(x_1)\cdots\phi(x_n):$ の生成・消滅演算子部分による展開式（A.8）の中に $\phi^{(c)}(x_{n+1})$ を「それが常に $\phi^{(a)}(x_i)$ $(i \geq N)$ の左に，かつそれ以外の演算子の右に位置するように挿入」したものを一般に $D[N]$ と書くことにすると，

上の第 1 項＋第 2 項は $D[n]$ である．また，第 3 項の伝播関数を除く部分は $:\phi(x_1)\cdots\phi(x_{n-1}):$ に等しいことは（A.8）式を見れば容易にわかるから，結局

$$\Big[:\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i):\Big]\,\phi^{(c)}(x_{n+1}) = D[n] + \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_n)\phi(x_{n+1})|0\rangle :\prod_{j=1}^{n-1}\phi(x_j):$$

となる．次に $D[n]$ を $\phi^{(c)}(x_{n-1})$ を含む部分と $\phi^{(a)}(x_{n-1})$ を含む部分に分けると四つの項が現れるが，それらに対して同様の計算を行うと

$$D[n] = D[n-1] + \langle 0|\mathrm{T}\phi(x_{n-1})\phi(x_{n+1})|0\rangle :\prod_{\substack{j=1\\(j\neq n-1)}}^{n}\phi(x_j):$$

これを続けていくと最後に（A.9）式の右辺第 1 項に対して

$$\Big[:\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i):\Big]\,\phi^{(c)}(x_{n+1}) = D[1] + \sum_{i=1}^{n}\Big[\,\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_{n+1})|0\rangle :\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\phi(x_j):\Big]$$

が得られる．この中の $D[1]$ は具体的に書けば

$$\sum_{P_n}\Big[\prod_{i\in P_n}\phi^{(c)}(x_i)\phi^{(c)}(x_{n+1})\prod_{j\in P_n^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]$$

だが，これは残っていた（A.9）式の右辺第 2 項

$$\sum_{P_n}\Big[\prod_{i\in P_n}\phi^{(c)}(x_i)\prod_{j\in P_n^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big]\phi^{(a)}(x_{n+1})$$

と組み合わされて

$$\sum_{P_{n+1}}\Big[\prod_{i\in P_{n+1}}\phi^{(c)}(x_i)\prod_{j\in P_{n+1}^c}\phi^{(a)}(x_j)\Big] = :\prod_{i=1}^{n+1}\phi(x_i):$$

となるので

$$\Big[:\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i):\Big]\,\phi(x_{n+1}) = :\prod_{i=1}^{n+1}\phi(x_i): + \sum_{i=1}^{n}\Big[\,\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_{n+1})|0\rangle :\prod_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\phi(x_j):\Big] \tag{A.10}$$

が得られる．これを $\mathrm{T}\left[\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i)\right]$ の展開式（A.7）の各項に適用しよう：

$$\begin{aligned}\mathrm{T}\Big[\prod_{i=1}^{n+1}\phi(x_i)\Big] &= \mathrm{T}\Big[\prod_{i=1}^{n}\phi(x_i)\Big]\phi(x_{n+1})\\ &= \sum_{E_n}\Big[\sum_{\substack{\{\text{pair}\}\\(\text{in }E_n)}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\ :\prod_{k\in E_n^c}\phi(x_k):\phi(x_{n+1})\Big]\\ &= \sum_{E_n}\Big[\sum_{\substack{\{\text{pair}\}\\(\text{in }E_n)}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\ :\prod_{k\in E_n^c}\phi(x_k)\phi(x_{n+1}):\Big]\\ &\quad+\sum_{E_n}\Big[\sum_{\substack{\{\text{pair}\}\\(\text{in }E_n)}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\\ &\qquad\times\sum_{k\in E_n^c}\Big[\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_k)\phi(x_{n+1})|0\rangle\ :\prod_{\substack{l\in E_n^c\\(l\neq k)}}\phi(x_l):\Big]\Big]\end{aligned}\tag{A.11}$$

これが $n+1$ 個の演算子の場合の展開式に等しければ，証明は完了したことになる．実際，これは次のように考えればわかる．まず（A.7）式を $n+1$ に適用した式

$$\sum_{E_{n+1}}\Big[\sum_{\substack{\{\text{pair}\}\\(\text{in }E_{n+1})}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\ :\prod_{k\in E_{n+1}^c}\phi(x_k):\Big]$$

を「x_{n+1} を正規積に含む部分」と「x_{n+1} を伝播関数に含む部分」とに分ける．すると，前者では {pair} の中には x_{n+1} は現れないのだから，その和は全ての E_n の（偶数個の元を持つ）部分集合の和ということになるので

$$\sum_{E_n}\Big[\sum_{\substack{\{\text{pair}\}\\(\text{in }E_n)}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\Big]:\prod_{k\in E_n^c}\phi(x_k)\phi(x_{n+1}):\tag{A.12}$$

と書ける．一方，後者では E_{n+1} に属する全ての m（但し $m\neq n+1$）に対して $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_m)\phi(x_{n+1})|0\rangle$ が現れ，その時にはそれ以外の $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle$ の中のペア $\{i<j\}$ には当然その m も $n+1$ も現れない．従って，「$\{i<j\}$ は E_n の元から成るペアで，かつ m はその E_n には含まれていない，つまりは m は E_n^c の元」ということになる．結果として，後者は

$$\sum_{E_n}\Big[\sum_{\substack{\{\text{pair}\}\\(\text{in }E_n)}}\prod_{\{i<j\}}\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_i)\phi(x_j)|0\rangle\sum_{m\in E_n^c}\Big[\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_m)\phi(x_{n+1})|0\rangle\ :\prod_{\substack{l\in E_n^c\\(l\neq m)}}\phi(x_l):\Big]\Big]\tag{A.13}$$

と表せる．両者の和 (A.12)+(A.13) は，確かに帰納法で得られた式（A.11）の右辺に一致している． ∎

問題 A.5　$n=3$ から出発して $n=4$ の公式が成立することを示せ．時間と根気のある人は更に $n=5$ の式を確かめよ．

最後に，この定理の実際の応用についての注意をしておこう．S 行列要素の計算では $\mathrm{T}[\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_1)\cdots\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_n)\,]$ という項が現れ，各 $\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_i)$ は複数の場の演算子の正規積を含む．その際には，**すでに同じ正規積の中に入っている演算子同士は伝播関数をつくらない**．これは,「伝播関数は演算子の順序交換で現れること」しかしながら「同一の正規積の中では，演算子同士は単に（反）交換してしまうこと」を考えれば明らかだろう．

付録 3　γ 行列とディラックスピノル

ここでは，レプトンやクォークが関与する反応の摂動計算に不可欠な γ 行列やスピノルについての性質をまとめる．

- γ 行列（$\gamma^\mu=(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma})$）

γ^0 を対角化する表示（標準表示またはディラック表示）においては

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\mathrm{I} & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & -\mathrm{I}\end{pmatrix},\qquad \gamma^i=\begin{pmatrix}\mathrm{O} & \sigma_i\\ -\sigma_i & \mathrm{O}\end{pmatrix} \tag{A.14}$$

ここで I, O は，それぞれ 2 行 2 列の単位行列と零行列，σ_i は，量子力学にも現れるパウリ行列

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{A.15}$$

で，次の関係を満たす：

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\,\mathrm{I} + i\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \{\sigma_i,\,\sigma_j\} = 2\delta_{ij}\,\mathrm{I} \tag{A.16}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i)_{ab}(\sigma_i)_{cd} = 2\delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd} \tag{A.17}$$

但し，ε_{ijk} は 3 階の反対称テンソルで，後述のレヴィ-チヴィタ テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ の $0ijk$ 成分を用いて $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{0ijk}$ と表せる．

● γ_5 行列の定義

$$\gamma^5 = \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

● γ 行列の性質・公式

任意の 4 元ベクトル a^μ に対し，以下では

$$a^\mu\gamma_\mu = a\gamma = \not{a}$$

と記す．

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0\gamma_\mu\gamma^0, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5, \quad \sigma_{\mu\nu}^\dagger = \gamma^0\sigma_{\mu\nu}\gamma^0 \tag{A.19}$$

但し，$\sigma_{\mu\nu}$ は

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$$

と定義される．また，(A.19) 式の第 1 および第 2 式は，厳密に書くなら 4 行 4 列の単位行列 I と零行列 O を用いて $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathrm{I}$, $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \mathrm{O}$ となるが，誤解の恐れは少ないので，簡潔さのため単なる数字を用いた．以下同様である．

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}, \quad \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}),$$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4ab, \quad \mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\gamma_5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_5) = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},$$

$$\mathrm{Tr}(\text{ 奇数個の }\gamma\text{ 行列の積 }) = 0, \tag{A.20}$$

$$\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_\nu = g_{\mu\rho}\gamma_\nu + g_{\rho\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\rho - i\varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma}\gamma^\sigma\gamma_5,$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4, \quad \gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4ab, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

- レヴィ-チヴィタテンソル

レヴィ-チヴィタテンソルと呼ばれる 4 階の反対称テンソル $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}) \equiv \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \rho & \sigma \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

と定義される．つまり，$\{\mu,\nu,\rho,\sigma\}$ が $\{0,1,2,3\}$ の偶（奇）置換なら $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = +(-)1$（但し，これにマイナス符号を付けた定義を採用している文献もある）．従って，その 0123 成分は

$$\varepsilon_{0123}(= -\varepsilon^{0123}) = 1$$

である．このテンソルは以下の関係を満たす：

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -4!, \qquad \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\tau}\varepsilon_\beta{}^{\rho\sigma\tau} = -3!\, g_{\alpha\beta}, \\
&\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} = -2!\,(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}), \\
&\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon_{\rho\sigma\tau}{}^{\mu} = -1!\,(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma}g_{\gamma\tau} - g_{\alpha\rho}g_{\beta\tau}g_{\gamma\sigma} + g_{\alpha\tau}g_{\beta\rho}g_{\gamma\sigma} \\
&\qquad - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma}g_{\gamma\rho} + g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau}g_{\gamma\rho} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}g_{\gamma\tau})
\end{aligned} \tag{A.22}$$

- ディラックスピノル

自由なディラック方程式

$$(i\gamma\partial - m)\psi(x) = 0, \quad \bar{\psi}(x)(i\gamma\overleftarrow{\partial} + m) = 0$$

の平面波解（II.66）に現れるディラックスピノル $u(\boldsymbol{p},s), v(\boldsymbol{p},s)$ の具体形は

$$u(\boldsymbol{p},s) = \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{p^0+m}\chi_s \end{pmatrix}, \quad v(\boldsymbol{p},s) = \sqrt{p^0+m}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma p}}{p^0+m}\chi'_s \\ \chi'_s \end{pmatrix} \tag{A.23}$$

但し，$v(\boldsymbol{p}, s) \equiv i\gamma_2 u^*(\boldsymbol{p}, s)$ であり，χ_s と χ'_s は

$$\chi'_s = -i\sigma_2\chi^*_s, \qquad \chi^\dagger_s\chi_{s'} = {\chi'_s}^\dagger\chi'_{s'} = \delta_{ss'} \tag{A.24}$$

を満たす2成分スピノルである．物理的に重要な状態は

1．スピンの z 成分（の2倍）σ_3 の固有状態 ♯A.2

$$\chi_{s=+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{s=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi'_{s=+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi'_{s=-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

および

2．ヘリシティ $\boldsymbol{\sigma p}/|\boldsymbol{p}|$ の固有状態 ♯A.3

$$\begin{aligned} \chi_{s=+1} &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \chi_{s=-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ \chi'_{s=+1} &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \chi'_{s=-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2) \\ -e^{i\phi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.26}$$

(θ, ϕ は運動量 $\boldsymbol{p}$ の極角と方位角) ♯A.4

上記の χ_s, χ'_s は，いずれも多くのテキストに書かれている標準形だが，実際には，全体に $e^{i\eta}$ という任意の位相因子を掛けても物理的な結果には影響しない．これを利用して，例えば（A.26）の $\chi_{s=+1}\,(\chi_{s=-1})$ に $e^{i\phi/2}\,(e^{-i\phi/2})$ を掛ければ

$$\chi_{s=+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad \chi_{s=-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

となる．運動量の向きに z 軸をとれば，当然のことながら（A.25）と（A.26）は同じ状態となる訳だが，このように位相を選んでおけば，実際に $\theta \to 0$ で両方の χ_s は一致する．

問題 A.6　運動量方向に z 軸を選び（つまり $p^\mu = (E, 0, 0, p)$ ととり），以下の問に答えよ．

♯A.2 但し，スピン $\boldsymbol{S}$ は，粒子の静止状態を除けばハミルトニアンと可換ではない．保存量は全角運動量 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ である．

♯A.3 ヘリシティはこれだけでハミルトニアンと可換である．

♯A.4 定義域は $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$. 従って，$-\boldsymbol{p}$ の極角はいつでも $\theta' = \pi - \theta$ だが，方位角は $\phi' = \phi + \pi$ $(0 \le \phi < \pi$ の時$)$, $\phi' = \phi - \pi$ $(\pi \le \phi < 2\pi$ の時$)$ となる．

1 $(\not p - m)u(\boldsymbol{p}, s) = 0$, $(\not p + m)v(\boldsymbol{p}, s) = 0$ であることを確かめよ．

2 「II.6 場の演算子のまとめ」の「3．ディラック場」の中で与えられているスピンベクトル s^μ を用いて

$$u(\boldsymbol{p}, s)\bar{u}(\boldsymbol{p}, s) = \frac{1+\gamma_5 \not s}{2}(\not p + m), \quad v(\boldsymbol{p}, s)\bar{v}(\boldsymbol{p}, s) = \frac{1+\gamma_5 \not s}{2}(\not p - m)$$

であることを確かめよ．

3 $P_L \equiv (1-\gamma_5)/2$, $P_R \equiv (1+\gamma_5)/2$ と定義する．$m=0$ として $P_{L,R}u(\boldsymbol{p}, s)$, $P_{L,R}v(\boldsymbol{p}, s)$ を計算し，P_L は u からは $s=-1$ 成分，v からは $s=+1$ 成分を，また，P_R はその逆に u からは $s=+1$ 成分，v からは $s=-1$ 成分をそれぞれ取り出すことを示せ．具体的には

$$P_L u(\boldsymbol{p}, s) = \delta_{s,-1} u(\boldsymbol{p}, s), \qquad P_L v(\boldsymbol{p}, s) = \delta_{s,+1} v(\boldsymbol{p}, s)$$
$$P_R u(\boldsymbol{p}, s) = \delta_{s,+1} u(\boldsymbol{p}, s), \qquad P_R v(\boldsymbol{p}, s) = \delta_{s,-1} v(\boldsymbol{p}, s)$$

であることを示せばよい．

4 ディラック場に対する全角運動量演算子は

$$\boldsymbol{J} = \int d^3\boldsymbol{x} \, :\psi^\dagger(x)\Big[\boldsymbol{x} \times (-i\nabla) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\Big]\psi(x): \qquad \text{但し，} \Sigma_i \equiv \begin{pmatrix} \sigma_i & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \sigma_i \end{pmatrix}$$

で与えられる．この z 成分 $J_z (= J^3)$ を生成・消滅演算子で表して

$$J_z \, c^\dagger(\boldsymbol{p}, \pm 1)|0\rangle = \pm\frac{1}{2} c^\dagger(\boldsymbol{p}, \pm 1)|0\rangle, \qquad J_z \, d^\dagger(\boldsymbol{p}, \pm 1)|0\rangle = \pm\frac{1}{2} d^\dagger(\boldsymbol{p}, \pm 1)|0\rangle$$

となることを示せ．ここでは $p^\mu = (E, 0, 0, p)$ となるように z 軸を選んでいるので，J_z 固有値への軌道角運動量からの寄与はない．従って，これより，確かに $c^\dagger$, $d^\dagger$ は大きさが 1/2 のスピンを持つ粒子・反粒子の生成演算子となっていることがわかる．

- $|\bar{u}\Gamma u|^2$ の計算に必要なスピノルの公式

$$[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1, s_1)\Gamma u(\boldsymbol{p}_2, s_2)\,]^* = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2, s_2)\gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 u(\boldsymbol{p}_1, s_1) \qquad \text{(A.27)}$$

具体的には

$$
\begin{aligned}
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma^\mu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma^\mu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = -\bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\sigma^{\mu\nu} u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\sigma^{\mu\nu} u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = -\bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma^\mu\gamma^\nu u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = \bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma^\nu\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}_1,s_1)\\
&[\,\bar{u}(\boldsymbol{p}_1,s_1)\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_2,s_2)\,]^* = -\bar{u}(\boldsymbol{p}_2,s_2)\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_5 u(\boldsymbol{p}_1,s_1)
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

● フィルツ変換

ディラックの γ 行列およびその独立な組み合わせ $\sigma_{\mu\nu}$, $i\gamma_\mu\gamma_5$, γ_5 に I（単位行列）を加えた 16 個の行列の全体

$$
\mathrm{I}\,(1),\quad \gamma_\mu\,(4),\quad \sigma_{\mu\nu}\,(6),\quad i\gamma_\mu\gamma_5\,(4),\quad \gamma_5\,(1) \tag{A.29}
$$

は完全系を構成する（括弧内の数字は独立な個数を表す）．すなわち，任意の (4,4) 行列はこのセットで展開できる．この 16 個の行列を適当な順番に並べ，まとめて $\varGamma_a\,(a=1\sim 16)$ と表す．

問題 A.7　この 16 個の行列は全て独立であることを示せ．具体的には，まず

$$
\mathrm{Tr}(\varGamma^a\varGamma_b) = 4\delta^a{}_b
$$

であることを確かめ，これを用いて

$$
\sum_{a=1}^{16} C^a\varGamma_a = 0 \iff \text{全ての } a \text{ に対して } C^a = 0
$$

を示せばよい．

すると，任意の行列 Γ の展開は

$$\Gamma = \sum_{a=1}^{16} c^a \Gamma_a \quad (\text{展開係数}: c^a = \mathrm{Tr}(\Gamma^a \Gamma)/4)$$

となる．この展開式の (i,k) 成分は

$$\Gamma_{ik} = \frac{1}{4} \sum_a \sum_{l',m'} (\Gamma_a)_{ik} (\Gamma^a)_{l'm'} \Gamma_{m'l'}$$

であるが，これを (l,m) 成分だけが 1 で，残りの成分は全て 0 であるような行列 Γ について書くと

$$\delta_{il}\delta_{km} = \frac{1}{4} \sum_a (\Gamma_a)_{ik} (\Gamma^a)_{ml}$$

となる．この両辺に $\bar{\psi}_{1i}(\Lambda^a \psi_2)_l (\bar{\psi}_3 \Lambda^b)_k \psi_{4m}$（$\psi_{1,2,3,4}$ は任意のスピノル，$\Lambda^{a,b}$ は任意の (4,4) 行列）を掛けると

$$(\bar{\psi}_1 \Lambda^a \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \psi_4) = \frac{1}{4} \sum_i (\bar{\psi}_1 \Gamma_i \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \Gamma^i \Lambda^a \psi_2) \tag{A.30}$$

が得られる．但し，ψ が反交換関係に従う量なら，右辺にはマイナス符号が付く（以下の式にはマイナスは入っていない）．これが**フィルツ変換**（Fierz transformation）の公式である．ここで注意しなければならないのは，右辺の和の中で，$\Gamma_i = \sigma_{\mu\nu}$ の時に全ての μ, ν についての和をとってしまうと正しい答えの 2 倍が出てしまうということである（$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu}$ だから両者は独立ではない）．そこで，(A.29) のセットの中で $\sigma_{\mu\nu}$ の替りに $\sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2}$ としておけば，すべての μ, ν について足せることになる．この時 (A.30) を具体的に書けば

$$\begin{aligned}
&(\bar{\psi}_1 \Lambda^a \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \psi_4) \\
&= \frac{1}{4} \Big[(\bar{\psi}_1 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \Lambda^a \psi_2) + (\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \gamma^\mu \Lambda^a \psi_2) \\
&\quad + (\bar{\psi}_1 \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \frac{\sigma^{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Lambda^a \psi_2) + (\bar{\psi}_1 i\gamma_\mu \gamma_5 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b i\gamma^\mu \gamma_5 \Lambda^a \psi_2) \\
&\quad + (\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda^b \gamma_5 \Lambda^a \psi_2) \Big]
\end{aligned} \tag{A.31}$$

である．

$(\bar{\psi}_1 \Lambda \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda \psi_4)$ で $\Lambda = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2}, i\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5$ と置いたものをそれぞれ S, V, T, A, P と表し，$(\bar{\psi}_1 \Lambda \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda \psi_2)$ の Λ に同じ量を代入したものを S', V', T', A', P' とすると，上の公式より

$$\begin{pmatrix} S' \\ V' \\ T' \\ A' \\ P' \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ V \\ T \\ A \\ P \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

という関係が導かれる．

問題 A.8　公式 (A.31) を用いて

$$\bar{\psi}_1 \gamma_\alpha (1-\gamma_5)\psi_2 \cdot \bar{\psi}_3 \gamma^\alpha (1-\gamma_5)\psi_4 = -\bar{\psi}_1 \gamma_\alpha (1-\gamma_5)\psi_4 \cdot \bar{\psi}_3 \gamma^\alpha (1-\gamma_5)\psi_2$$

が成り立つことを示せ．

付録 4　対称性と場の演算子の変換性

対象とする系が，いろいろな変換の下でどのように振る舞うかは有用な物理的情報である．ここでは，幾つかの重要な変換に対して場の演算子が持つ性質を集めた．

まずは，一般論から始めよう．$x \to x' = \Lambda x$ という変換に対して，古典場 $\phi_{\rm cl}(x)$ はその表現に応じて

$$\phi'_{\rm cl}(x') = D(\Lambda)\phi_{\rm cl}(x) \tag{A.33}$$

と変換される．これに対し，対応する**量子場（場の演算子）の変換性は，状態（の変換性）とそこでの期待値から決められる：**

状態が $|\Phi\rangle \to |\Phi'\rangle = U(\Lambda)|\Phi\rangle$ と変換される時，$\phi'_{\rm cl}(x')$, $\phi_{\rm cl}(x)$ に対応するのはそれぞれ $\langle\Phi'|\phi(x')|\Phi'\rangle$, $\langle\Phi|\phi(x)|\Phi\rangle$ だから

$$\langle\Phi'|\phi(x')|\Phi'\rangle = D(\Lambda)\langle\Phi|\phi(x)|\Phi\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \langle\Phi|U(\Lambda)^{-1}\phi(x')U(\Lambda)|\Phi\rangle = D(\Lambda)\langle\Phi|\phi(x)|\Phi\rangle \tag{A.34}$$

これが任意の状態について成り立つためには

$$U(\Lambda)\phi(x)U(\Lambda)^{-1} = D(\Lambda)^{-1}\phi(x') \tag{A.35}$$

でなければならない.[♯A.5]

以下では C(**荷電共役**:Charge conjugation), P(**空間反転**:Space inversion), T(**時間反転**:Time reversal) 変換についてまとめる.

1. スカラー場

- C 変換

これは, 粒子・反粒子を入れ換える変換で, **実スカラー場**はC不変:

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi(x) \tag{A.36}$$

従って, 生成・消滅演算子も不変:

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = a(\boldsymbol{p}) \tag{A.37}$$

複素スカラー場 $\phi(x)$, $\phi^\dagger(x)$ は互いに移り変わる:

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi^\dagger(x), \qquad \mathcal{C}\phi^\dagger(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi(x) \tag{A.38}$$

生成・消滅演算子についても同様:

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = b(\boldsymbol{p}), \qquad \mathcal{C}b(\boldsymbol{p})\mathcal{C}^{-1} = a(\boldsymbol{p}) \tag{A.39}$$

- P 変換

これは, $x^\mu \;\rightarrow\; \tilde{x}^\mu \equiv (t,\, -\boldsymbol{x})\ (= x_\mu)$ という空間座標を反転させる変換.

♯A.5 量子場は, 直接目に見える量ではないので, その変換性は, 対応する古典場やそれに結合する他の場の変換性と矛盾しないように(全体として作用積分を不変に保つように)決められる. もし, どのように工夫しても変換性が論理矛盾のないように定義できないなら,「その対称性は破れている」ということになる.

$$\mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \pm\phi(\tilde{x}) \tag{A.40}$$

但し，+ はスカラー（Scalar）の，− は擬スカラー（Pseudo scalar）の場合．
生成・消滅演算子については

$$\mathcal{P}a(\boldsymbol{p})\mathcal{P}^{-1} = \pm a(-\boldsymbol{p}), \quad \mathcal{P}b(\boldsymbol{p})\mathcal{P}^{-1} = \pm b(-\boldsymbol{p}) \tag{A.41}$$

- T変換

これは，Pとは逆に $x^\mu \ \rightarrow \ -\tilde{x}^\mu \equiv (-t,\ \boldsymbol{x})\ (= -x_\mu)$ という時間座標反転の変換．作用の不変性から出発しても，電磁場との結合を考えても符号の不定性が残る：

$$\mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1} = \pm\phi(-\tilde{x}) \tag{A.42}$$

但し，$:\bar{\psi}\psi:\phi$ や $:\bar{\psi}i\gamma_5\psi:\phi$ のような (擬)スカラー結合の T不変性を要請すれば，後の（A.50）式から導かれる ψ の性質

$$\mathcal{T}:\bar{\psi}(x)\psi(x):\mathcal{T}^{-1} = :\bar{\psi}(-\tilde{x})\psi(-\tilde{x}):$$

$$\mathcal{T}:\bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x):\mathcal{T}^{-1} = -:\bar{\psi}(-\tilde{x})i\gamma_5\psi(-\tilde{x}):$$

より，P変換と同様にスカラー場は+，擬スカラー場は−と決まる．
生成・消滅演算子については

$$\mathcal{T}a(\boldsymbol{p})\mathcal{T}^{-1} = \pm a(-\boldsymbol{p}), \quad \mathcal{T}b(\boldsymbol{p})\mathcal{T}^{-1} = \pm b(-\boldsymbol{p}) \tag{A.43}$$

2．ディラック場

- C変換

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^t(x) \ \ (C = i\gamma^2\gamma^0) \tag{A.44}$$

生成・消滅演算子については，スピノル-反スピノル関係を

$$v(\boldsymbol{p},s) = C\bar{u}^t(\boldsymbol{p},s), \quad u(\boldsymbol{p},s) = C\bar{v}^t(\boldsymbol{p},s) \tag{A.45}$$

と選んだ場合♯A.6

$$\mathcal{C}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{C}^{-1}=d(\boldsymbol{p},s),\quad \mathcal{C}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{C}^{-1}=c(\boldsymbol{p},s) \tag{A.46}$$

となる.

- P 変換

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1}=P\psi(\tilde{x})\quad (P=\gamma^0) \tag{A.47}$$

生成・消滅演算子の変換性は

$$\gamma^0 u(\boldsymbol{p},s)=u(-\boldsymbol{p},s),\qquad \gamma^0 v(\boldsymbol{p},s)=-v(-\boldsymbol{p},s) \tag{A.48}$$

より

$$\mathcal{P}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1}=c(-\boldsymbol{p},s),\qquad \mathcal{P}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{P}^{-1}=-d(-\boldsymbol{p},s) \tag{A.49}$$

と得られる.

> 注 意: ここで s はスピン（の z 成分の 2 倍）を意味しているが，もし s がヘリシティを表すなら，右辺でその符号を変える必要がある.♯A.7 何故なら，空間反転でスピン自身は向きを変えないが（軸性ベクトル），運動量の向きの逆転に伴ってその運動量方向の成分（ヘリシティ）は変わるからである．以下でも運動量の符号が変わる場合は同様.

- T 変換

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1}=T\psi(-\tilde{x})\quad (T=i\gamma^1\gamma^3) \tag{A.50}$$

生成・消滅演算子の変換性は

$$\gamma^1\gamma^3 u(\boldsymbol{p},s)=-su^*(-\boldsymbol{p},-s),\qquad \gamma^1\gamma^3 v(\boldsymbol{p},s)=-sv^*(-\boldsymbol{p},-s) \tag{A.51}$$

（ $s=\pm 1$ であることに注意）

♯A.6「ゲージ場の量子論」（九後汰一郎，培風館）2-2 （14 ,15 ）式参照

♯A.7 実際には，付録 3 で与えたヘリシティの固有状態のスピノル（A.26）をそのまま使うと $\gamma^0 u(\boldsymbol{p},s)=(-)i\,u(-\boldsymbol{p},-s)$ となる．この $(-)i$ は観測可能量には何の影響も及ぼさないが，それでも気持ちが悪ければ，そこで述べた $e^{i\eta}$ という不定性を利用して消すことが出来る.

および，Tは反線型（Anti-linear）演算子（すべてのC数をその複素共役に変える）であることを考慮して

$$\mathcal{T}c(\boldsymbol{p},s)\mathcal{T}^{-1} = is\,c(-\boldsymbol{p},-s), \quad \mathcal{T}d(\boldsymbol{p},s)\mathcal{T}^{-1} = -is\,d(-\boldsymbol{p},-s) \tag{A.52}$$

と求まる．

3．ベクトル場

実ベクトル場の物理的成分の変換性：

- C変換

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(x) \tag{A.53}$$

生成・消滅演算子は

$$\mathcal{C}a(\boldsymbol{p},h)\mathcal{C}^{-1} = -a(\boldsymbol{p},h) \tag{A.54}$$

- P変換

$$\mathcal{P}A_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = A^\mu(\tilde{x}) \tag{A.55}$$

生成・消滅演算子の変換性は，空間反転に対する偏極ベクトルの性質に依存する．本書では，II.6.4 で述べたように，$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p},h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},-h)$ と決めている（(II.91) 式を見よ）ので

$$\mathcal{P}a(\boldsymbol{p},h)\mathcal{P}^{-1} = a(-\boldsymbol{p},-h) \tag{A.56}$$

- T変換

$$\mathcal{T}A_\mu(x)\mathcal{T}^{-1} = A^\mu(-\tilde{x}) \tag{A.57}$$

$\varepsilon_\mu(-\boldsymbol{p},h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},-h)$ および $\varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},h)$ の定義より $\varepsilon^*_\mu(-\boldsymbol{p},h) = \varepsilon^\mu(\boldsymbol{p},h)$ だから

$$\mathcal{T}a(\boldsymbol{p},h)\mathcal{T}^{-1} = a(-\boldsymbol{p},h) \tag{A.58}$$

複素ベクトル場について

この場合についても同様に調べることが出来るが，実際にはその代表的粒子であるWボソン，更には実ベクトル場のZボソンも共にV，A混合のカレント

に結合するので，そのP変換性は定義のしようがない（つまり，**パリティの破れ**：Parity violation）．しかし，CP 変換の下ではVカレントとAカレントは同じように $(\mathcal{CP})J_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -J^\mu(\tilde{x})$ と振る舞うので

$$(\mathcal{CP})Z_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -Z^\mu(\tilde{x}), \quad (\mathcal{CP})W_\mu^\pm(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -W^{\mp\mu}(\tilde{x}) \tag{A.59}$$

と決めることが出来る．これから生成・消滅演算子の変換性も決められる．但し，荷電弱相互作用の場合には，結合定数が虚部を持つとこの CP 対称性すら破れてしまう．これに関連する議論は，次の付録5「PおよびCPの保存・非保存」でもう少し詳しく行なう．

付録5 P および CP の保存・非保存

摂動計算の対象として実際に興味を集めるのは，C，PやCP 対称性の保存・非保存が問題となる反応であることも多い．そこで，この対称性と相互作用の形についてまとめておこう．

繰り込み可能な場の理論においては，物質場と力の場との相互作用は

$$\mathcal{L}_\mathrm{I} = (\text{結合定数})\,[\,\text{物質場のカレント}\,] \times [\,\text{力(ポテンシャル)の場}\,]$$

という形で与えられる．特に

(1) 強相互作用の量子色力学，電磁相互作用の量子電磁力学や電弱標準理論の中性弱相互作用のカレントのように，粒子の種類が変化しない場合には

$$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = g\, J_\mu(x)\, V^\mu(x) \tag{A.60}$$

（但し，g は実定数，カレントはエルミート $J_\mu^\dagger(x) = J_\mu(x)$）であり，[♯A.8]

[♯A.8] 但し，現段階では実験的証拠はないが，理論的には $t \rightleftharpoons c \rightleftharpoons u, b \rightleftharpoons s \rightleftharpoons d$ のように粒子の種類が変わる中性カレントを含む模型も可能である．その場合には $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ の形は $(gJ_\mu + g^* J_\mu^\dagger)V^\mu$ となる．

(2) 荷電弱相互作用のように，粒子の種類が変化する場合には

$$\mathcal{L}_{\rm I}(x) = g\, J_\mu(x)\, V^\mu(x) + g^*\, J_\mu^\dagger(x)\, V^{\mu\dagger}(x) \tag{A.61}$$

となる．

さて，対称性と場の演算子の変換性のところで述べたように，力の場 $V_\mu(x)$ の P，CP 変換性は，それが結合するカレントの変換性に応じて，作用（$= \int L\,dt = \int \mathcal{L}\,d^4x$）が不変であるように決められる．

P 変換

P 変換 $x^\mu \equiv (t, \boldsymbol{x}) \;\to\; \tilde{x}^\mu \equiv (t, -\boldsymbol{x})\,(= x_\mu)$ の下では，場の演算子は以下のように変換される：

$$\begin{array}{lll} \bullet & \text{スカラー場} & \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \phi(\tilde{x}) \\ \bullet & \text{擬スカラー場} & \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = -\phi(\tilde{x}) \\ \bullet & \text{ディラック場} & \mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} = \gamma^0\psi(\tilde{x}) \\ & & \mathcal{P}\bar{\psi}(x)\mathcal{P}^{-1} = \bar{\psi}(\tilde{x})\gamma^0 \\ \bullet & \text{ベクトル場} & \mathcal{P}V_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = V^\mu(\tilde{x}) \\ \bullet & \text{軸性ベクトル場} & \mathcal{P}A_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = -A^\mu(\tilde{x}) \end{array} \tag{A.62}$$

また，これに伴い，スピノルから成るカレント密度は

$$\begin{array}{l} \bullet\ \mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} = :\bar{\psi}_1(\tilde{x})\psi_2(\tilde{x}): \\ \bullet\ \mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_5\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} = - :\bar{\psi}_1(\tilde{x})\gamma_5\psi_2(\tilde{x}): \\ \bullet\ \mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} = :\bar{\psi}_1(\tilde{x})\gamma^\mu\psi_2(\tilde{x}): \\ \bullet\ \mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} = - :\bar{\psi}_1(\tilde{x})\gamma^\mu\gamma_5\psi_2(\tilde{x}): \\ \bullet\ \mathcal{P} :\bar{\psi}_1(x)\sigma_{\mu\nu}\psi_2(x): \mathcal{P}^{-1} = :\bar{\psi}_1(\tilde{x})\sigma^{\mu\nu}\psi_2(\tilde{x}): \end{array} \tag{A.63}$$

と変換される．

QED においては $J_\mu = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x):$ だから，上記の変換性より

$$\mathcal{P}J_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = J^\mu(\tilde{x}) \tag{A.64}$$

従って，電磁場 $A_\mu(x)$ のP変換性を

$$\mathcal{P}A_\mu(x)\mathcal{P}^{-1} = A^\mu(\tilde{x}) \tag{A.65}$$

と決めれば作用は不変になり，電磁相互作用はP対称性を破らないという結論となる．

ところが，同じ中性カレントでも中性弱カレントの方は $J_\mu^{\mathrm{NC}} = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu(a+b\gamma_5)\psi(x):$ という形をしており，γ_5 の部分（軸性カレント）にP変換を施すと

$$\mathcal{P} :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x): \mathcal{P}^{-1} = - :\bar{\psi}(\tilde{x})\gamma_\mu\gamma_5\psi(\tilde{x}):$$

と余分にマイナス符号が出るため，カレントの構造自体が変わってしまう．結果として，$Z_\mu(x)$ の変換性をどのように工夫しようと作用を不変に保つことは出来ない．この事情は荷電カレントの場合も全く同じである．これが，付録4でも述べた弱相互作用におけるP対称性の破れである．

CP 変換

P変換に加えC変換を同時に施すと状況は変わる．つまりC変換の下では，場の演算子およびカレント密度は

- (擬)スカラー場 $\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1} = \phi^\dagger(x)$
- ディラック場 $\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = C\bar{\psi}^t(x)$
  $\mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1} = -\psi^t(x)C^{-1}$ （ $C = i\gamma^2\gamma^0$ ） (A.66)
- ベクトル場 $\mathcal{C}V_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -V_\mu^\dagger(x)$
- 軸性ベクトル場 $\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = A_\mu^\dagger(x)$

- $\mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} = :\bar{\psi}_2(x)\psi_1(x):$
- $\mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_5\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} = :\bar{\psi}_2(x)\gamma_5\psi_1(x):$
- $\mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} = - :\bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\psi_1(x):$ (A.67)
- $\mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} = :\bar{\psi}_2(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_1(x):$
- $\mathcal{C} :\bar{\psi}_1(x)\sigma_{\mu\nu}\psi_2(x): \mathcal{C}^{-1} = - :\bar{\psi}_2(x)\sigma_{\mu\nu}\psi_1(x):$

と変換されるため

$$(\mathcal{CP}):\bar{\psi}_i(x)\gamma_\mu\psi_j(x):(\mathcal{CP})^{-1} = -:\bar{\psi}_j(\tilde{x})\gamma^\mu\psi_i(\tilde{x}):$$
$$(\mathcal{CP}):\bar{\psi}_i(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi_j(x):(\mathcal{CP})^{-1} = -:\bar{\psi}_j(\tilde{x})\gamma^\mu\gamma_5\psi_i(\tilde{x}):$$

（中性カレントの場合には $i=j$）となるので，中性弱相互作用の場合には

$$(\mathcal{CP})Z_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -Z^\mu(\tilde{x}) \tag{A.68}$$

また，荷電弱相互作用の場合には（g が実数なら）

$$(\mathcal{CP})W_\mu^\pm(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -W^{\mp\mu}(\tilde{x}) \tag{A.69}$$

と決めることで作用を不変に出来る．つまりは CP 対称性が存在することになる．しかしながら，荷電相互作用の場合には，結合定数 g が虚数部分を含むと♯A.9 その部分は

$$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = i\,\mathrm{Im}(g)\left[\, J_\mu(x)W^{+\mu}(x) - J_\mu^\dagger(x)W^{-\mu}(x)\,\right]$$
$$(\mathcal{CP})\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -i\,\mathrm{Im}(g)\left[\, J^\mu(\tilde{x})W_\mu^+(\tilde{x}) - J^{\mu\dagger}(\tilde{x})W_\mu^-(\tilde{x})\,\right]$$

となり，この CP 対称性をも破ってしまう．電弱標準理論の枠内でもクォーク（およびレプトン）が3世代あれば，この機構による CP 非保存が起こり得ることを指摘したのが小林・益川理論である．

CP 対称性と形状因子

より一般的な立場からカレントの行列要素の形を考えてみよう．

(1) 電磁/中性弱カレント

A_μ, Z_μ 共にV，Aカレントと同じ CP 変換性を持つと決めたので，標準理論のように $(\mathcal{CP})J_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -J^\mu(\tilde{x})$ なら結合 $J_\mu(x)A^\mu(x)$ または $J_\mu(x)Z^\mu(x)$ の CP 不変性は保たれるが，もし $(\mathcal{CP})J_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = J^\mu(\tilde{x})$ となる部分があれば，そこで CP が破れることになる.♯A.10

♯A.9（粒子の種類が変わらない）中性カレントの場合には，ラグランジアンのエルミート性から結合定数は実数しか有り得ない．

♯A.10 CP を2回続ければ状態は元に戻る訳だから，相互作用の CP 変換性は，ここで書いたように＋か－しかない．

例として $e\bar{e} \to (\gamma,\ Z) \to t\bar{t}$ 反応を取り上げる．トップクォーク場のカレント $J_\mu(x)$ の行列要素への寄与は $\langle t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\bar{t}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})|J_\mu(0)|0\rangle$ という形である．これは，ローレンツ共変性から四つの形状因子 $A_v,\ B_v,\ C_v,\ D_v$（$v = \gamma$ または Z）を用いて

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}_t, s_t)\left[\gamma_\mu(A_v + B_v\gamma_5) + \frac{(p_t - p_{\bar{t}})_\mu}{2m_t}(C_v + D_v\gamma_5)\right]v(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}}) \tag{A.70}$$

と表せる.[♯A.11] $|t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\bar{t}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})\rangle$ $(= c^\dagger(\boldsymbol{p}_t, s_t)d^\dagger(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})|0\rangle)$ の変換性は

$$\mathcal{C}c(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{C}^{-1} = d(\boldsymbol{p}, s), \qquad \mathcal{C}d(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{C}^{-1} = c(\boldsymbol{p}, s)$$
$$\mathcal{P}c(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{P}^{-1} = c(-\boldsymbol{p}, s), \qquad \mathcal{P}d(\boldsymbol{p}, s)\mathcal{P}^{-1} = -d(-\boldsymbol{p}, s)$$

より

$$\begin{aligned}(\mathcal{CP})|t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\bar{t}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})\rangle &= (\mathcal{CP})c^\dagger(\boldsymbol{p}_t, s_t)d^\dagger(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})(\mathcal{CP})^{-1}(\mathcal{CP})|0\rangle \\ &= -d^\dagger(-\boldsymbol{p}_t, s_t)c^\dagger(-\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})|0\rangle = |t(-\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})\bar{t}(-\boldsymbol{p}_t, s_t)\rangle\end{aligned} \tag{A.71}$$

（真空 $|0\rangle$ は CP 不変：$\mathcal{CP}|0\rangle = 0$）となるから，CP 保存カレントの場合には

$$\begin{aligned}&\langle t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\bar{t}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})|J_\mu(0)|0\rangle \\ &\quad = \langle t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\bar{t}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})|(\mathcal{CP})^{-1}(\mathcal{CP})J_\mu(0)(\mathcal{CP})^{-1}(\mathcal{CP})|0\rangle \\ &\quad = -\langle t(-\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})\bar{t}(-\boldsymbol{p}_t, s_t)|J^\mu(0)|0\rangle\end{aligned} \tag{A.72}$$

という関係が成立しなければならない．また，CP 非保存カレントの場合には右辺の符号がプラスである関係が要求されることになる．

CP 保存カレントの場合について，形状因子 $A_v \sim D_v$ の定義に従うと上記関係式の右辺は

$$-\bar{u}(-\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})\left[\gamma^\mu(A_v + B_v\gamma_5) + \frac{(\tilde{p}_{\bar{t}} - \tilde{p}_t)^\mu}{2m_t}(C_v + D_v\gamma_5)\right]v(-\boldsymbol{p}_t, s_t) \tag{A.73}$$

[♯A.11] 実際には $(p_t + p_{\bar{t}})_\mu$ に比例する項も可能だが，その寄与は電子質量を無視する近似では0となるので（この理由を考えてみること），ここには含めない．

（但し，$\tilde{p}^\mu \equiv (p^0, -\boldsymbol{p})$）となる．ここで，

$$\tilde{p}^\mu = p_\mu,\quad \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_\mu,\quad u(-\boldsymbol{p}, s) = \gamma^0 u(\boldsymbol{p}, s),\quad v(-\boldsymbol{p}, s) = -\gamma^0 v(\boldsymbol{p}, s) \quad \text{(A.74)}$$

を用いると，この式は

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}}) \left[\gamma_\mu(A_v - B_v\gamma_5) - \frac{(p_t - p_{\bar{t}})_\mu}{2m_t}(C_v - D_v\gamma_5) \right] v(\boldsymbol{p}_t, s_t)$$

と変形できる．更に，C 変換に現れる関係

$$v(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{u}^t(\boldsymbol{p}, s),\quad u(\boldsymbol{p}, s) = C\bar{v}^t(\boldsymbol{p}, s) \qquad (C = i\gamma^2\gamma^0)$$

および，それに伴う

$$C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^t,\quad C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t,\quad C\gamma_\mu\gamma_5 C^{-1} = (\gamma_\mu\gamma_5)^t$$

という γ 行列の性質を用いると

$$\begin{aligned}
&-v^t(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})C^{-1} \left[\gamma_\mu(A_v - B_v\gamma_5) - \frac{(p_t - p_{\bar{t}})_\mu}{2m_t}(C_v - D_v\gamma_5) \right] C\bar{u}^t(\boldsymbol{p}_t, s_t) \\
&= -v^t(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}}) \left[-A_v\gamma_\mu^t - B_v(\gamma_\mu\gamma_5)^t - \frac{(p_t - p_{\bar{t}})_\mu}{2m_t}(C_v - D_v\gamma_5^t) \right] \bar{u}^t(\boldsymbol{p}_t, s_t) \\
&= \bar{u}(\boldsymbol{p}_t, s_t) \left[\gamma_\mu(A_v + B_v\gamma_5) + \frac{(p_t - p_{\bar{t}})_\mu}{2m_t}(C_v - D_v\gamma_5) \right] v(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})
\end{aligned}$$

となる（$C^t = C^{-1} = -C$ に注意）．これを

$$\begin{aligned}
&\langle t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\bar{t}(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})|J_\mu(0)|0\rangle \\
&\quad = \bar{u}(\boldsymbol{p}_t, s_t) \left[\gamma_\mu(A_v + B_v\gamma_5) + \frac{(p_t - p_{\bar{t}})_\mu}{2m_t}(C_v + D_v\gamma_5) \right] v(\boldsymbol{p}_{\bar{t}}, s_{\bar{t}})
\end{aligned}$$

と見比べると，両者が一致するためには $D_v = 0$ でなければならないことがわかる．逆に CP 非保存カレントの場合には $A_v = B_v = C_v = 0$ でなければならない．この D_v 項は（トップクォークの）**電気双極子能率**（Electric dipole moment）に関係している．

(2) 荷電弱カレント

W_μ の CP 変換性は $(\mathcal{CP})W^{\pm}_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -W^{\mp\mu}(\tilde{x})$ と決められたので，結合定数が実数とすれば，$(\mathcal{CP})J_\mu(x)(\mathcal{CP})^{-1} = -J^{\mu\dagger}(\tilde{x})$ の場合に CP 不変となる．

ここでは $t \to bW^+, \bar{t} \to \bar{b}W^-$ という崩壊を考える．これらの行列要素にはそれぞれ $\langle b(\boldsymbol{p}_b, s_b)|J_\mu(0)|t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\rangle$, $\langle \bar{b}(\boldsymbol{p}_b, s_b)|J^\dagger_\mu(0)|\bar{t}(\boldsymbol{p}_t, s_t)\rangle$ が寄与する．再び，ローレンツ共変性を考慮してこれらを

$$\bar{u}(\boldsymbol{p}_b, s_b)\left[\gamma_\mu(f_1^L P_L + f_1^R P_R) - \frac{i\sigma_{\mu\nu}k^\nu}{M_W}(f_2^L P_L + f_2^R P_R)\right]u(\boldsymbol{p}_t, s_t) \tag{A.75}$$

$$\bar{v}(\boldsymbol{p}_t, s_t)\left[\gamma_\mu(\bar{f}_1^L P_L + \bar{f}_1^R P_R) - \frac{i\sigma_{\mu\nu}k^\nu}{M_W}(\bar{f}_2^L P_L + \bar{f}_2^R P_R)\right]v(\boldsymbol{p}_b, s_b) \tag{A.76}$$

(k はWの運動量) と表そう．J_μ が CP 保存カレントである場合には

$$\langle b(\boldsymbol{p}_b, s_b)|J_\mu(0)|t(\boldsymbol{p}_t, s_t)\rangle = -\langle \bar{b}(-\boldsymbol{p}_b, s_b)|J^{\mu\dagger}(0)|\bar{t}(-\boldsymbol{p}_t, s_t)\rangle \tag{A.77}$$

という関係が満たされなければならない．この右辺は $\bar{f}_{1,2}^{L,R}$ の定義より

$$-\bar{v}(-\boldsymbol{p}_t, s_t)\left[\gamma^\mu(\bar{f}_1^L P_L + \bar{f}_1^R P_R) - \frac{i\sigma^{\mu\nu}\tilde{k}_\nu}{M_W}(\bar{f}_2^L P_L + \bar{f}_2^R P_R)\right]v(-\boldsymbol{p}_b, s_b)$$

と書けるが，中性カレントの場合と同様の変形を行うと

$$\begin{aligned}
&-\bar{v}(\boldsymbol{p}_t, s_t)\gamma^0\left[\gamma^\mu(\bar{f}_1^L P_L + \bar{f}_1^R P_R) - \frac{i\sigma^{\mu\nu}\tilde{k}_\nu}{M_W}(\bar{f}_2^L P_L + \bar{f}_2^R P_R)\right]\gamma^0 v(\boldsymbol{p}_b, s_b)\\
&= -\bar{v}(\boldsymbol{p}_t, s_t)\left[\gamma_\mu(\bar{f}_1^L P_R + \bar{f}_1^R P_L) - \frac{i\sigma_{\mu\nu}k^\nu}{M_W}(\bar{f}_2^L P_R + \bar{f}_2^R P_L)\right]v(\boldsymbol{p}_b, s_b)\\
&= -u^t(\boldsymbol{p}_t, s_t)C\left[\gamma_\mu(\bar{f}_1^L P_R + \bar{f}_1^R P_L) - \frac{i\sigma_{\mu\nu}k^\nu}{M_W}(\bar{f}_2^L P_R + \bar{f}_2^R P_L)\right]C^{-1}\bar{u}^t(\boldsymbol{p}_b, s_b)\\
&= \bar{u}(\boldsymbol{p}_b, s_b)\left[\gamma_\mu(\bar{f}_1^L P_L + \bar{f}_1^R P_R) - \frac{i\sigma_{\mu\nu}k^\nu}{M_W}(\bar{f}_2^R P_L + \bar{f}_2^L P_R)\right]u(\boldsymbol{p}_t, s_t)
\end{aligned}$$

となる．従って，この場合には

$$f_1^{L,R} = \bar{f}_1^{L,R}, \qquad f_2^{L,R} = \bar{f}_2^{R,L} \tag{A.78}$$

という関係が成り立つ．一方，CP 非保存カレントの場合には

$$f_1^{L,R} = -\bar{f}_1^{L,R}, \qquad f_2^{L,R} = -\bar{f}_2^{R,L} \tag{A.79}$$

でなければならないことも容易にわかる．

あとがき・参考図書

すでにお気付きの方も多いと思うが，この原稿は図も含め，すべて LaTeX で作成した.♯A.12 従って，内容に誤りがある場合のみならず，単なるミスプリントも全て筆者の責任である．自分の講義においてノートのコピーを配布しているような段階なら修正も変更も簡単に口頭で行えるが，活字となり書店に並んでしまうと話は全く別だ．せっかくこの本を手にしてくれた読者に迷惑が掛かってしまう．実は，筆者が修士課程に入学して読み始めた場の理論の教科書は結構ミスプリントの多い本だった．はじめのうちは，自分の計算と合わない箇所がある度に「また間違えてしまった」と頭を抱え込んだ．ところがミスプリントが多いことに気付いた後は，自分が本当に間違いを犯しても図々しく「またミスプリントか」と片付けてしまうようになってしまった.「誤りや誤植を探すのも大切な勉強のうち」という太っ腹な意見も少なからず耳にするし，それも間違ってはいないとは思うが，当時の私のような自分の間違いに鈍感な読者を生んでしまうことはやはり避けるべきだろう．それだけに原稿は何度もチェックしたつもりだが，内容の不備・不正確な記述などお気付きの方は何でもお知らせ頂けたらと思っている.

終わりに幾つかの本を参考図書としてあげておきたい.「はじめに」に書いたように，本書の読者として特に想定しているのは「すでに場の理論の本格的教科書に取り組んでいる」あるいは「一応それを読み終えた」方々なので，そういう読者のためにここで参考図書リストを与えたりすると，却って混乱するかも知れないが，以下はあくまで筆者自身が参考にしたもので，名著リストのようなものではないことは予め了解をお願いしたい.

量子力学を勉強し終えた学生が，次に取り組む科目の一つはディラック方程式や電磁場の量子化を中心とする，いわゆる相対論的量子力学だろう．これについては

- 「相対論的量子力学」(森田正人, 森田玲子著：共立出版)

が丁寧に書かれていると思う．筆者の研究室でも 4 年生のゼミでよく利用させてもらっている．但し，時間座標は虚数単位 i を含む形式なので，最近の他の本とのギャップを感じる読者もいるかも知れない.

(比較的) 新しい本格的な教科書の代表は

♯A.12 ファインマン図の作成には FEYNMAN.tex を用いた.

- 「Quantum Field Theory」(C. Itzykson, J-B. Zuber 著： McGraw-Hill Inc.)
- 「場の量子論（全4巻)」(S. Weinberg 著，青山・有末共訳： 吉岡書店)

だろうか．いずれも読み通すには相当な根気と時間が必要だが，しかし場の量子論を勉強したと胸を張るためにはこのレベルの本を最低1冊は読了する必要がある．その途中で混乱したり疲れてきた時にでも本書を手にとって貰えたらと思う．

もう少し敷居の低い本としては

- 「Quantum Field Theory」(F. Mandl, G. Shaw 著： John Wiley and Sons Ltd.)

場の量子化に的を絞って詳しい解説をしているのは

- 「Field Quantization」(W. Greiner, J. Reinhardt 著： Springer)

W. Greiner によるこのシリーズには電弱標準理論や量子色力学についての巻もある．日本ではまだそれほど知名度が高いとも思えないが，どれも丁寧に書かれている．

本書と同じ様なタイプの本としては

- 「場の理論計算入門」(A.N. Kamal 著，高橋訳：講談社)

がある．但し，本書よりは標準テキストに近い内容構成になっている．

素粒子物理学を専攻する学生は，場の量子論を一通り学んだ後，現代素粒子物理のコアであるゲージ理論および実際の素粒子相互作用などについてより詳しく勉強する訳だが，それについては

- 「ゲージ場の量子論 I・II」(九後汰一郎 著：培風館)
- 「An Introduction to Quantum Field Theory」(M.E. Peskin, D.V. Schroeder 著：Addison Wesley)
- 「Gauge theory of elementary particle physics」(T-P. Cheng, L-F. Li 著：Oxford Univ. Press)
- 「クォークとレプトン」(F. Halzen, A.D. Martin 著，広瀬・小林共訳：培風館)

をあげておこう.

これ以外にも有名な教科書としては，古いところでは Bogoliubov – Shirkov や Bjorken – Drell の本，最近のものでは Quigg や Ryder の本などあり，また本文や付録の中で参照した本も当然のことながら大変参考になった．しかしながら，それら全てを挙げ始めたらきりがないので，後はそれぞれ自分に合ったものを選んで貰うことにして紹介を終える.

索 引

あ 行

か 行

ま　行

や　行

ら　行

わ 行

著者略歴

日置　善郎　（ひおき　ぜんろう）

1951 年 7 月：岐阜県（郡上八幡）に生まれる

岐阜北高から京大理学部を経て

1980 年：京大大学院博士課程修了（理学博士）

同年：学振奨励研究員（京大基礎物理学研究所）

1984 年：徳島大学教養部講師

1986 年：日米科学技術協力研究員（スタンフォード大学）

同年：独・フンボルト財団研究員（マックス-プランク研究所）

1994 年：同研究員（ミュンヘン工科大学）

現在：徳島大学大学院ソシオアーツ＆サイエンス研究部教授

専攻：理論物理学（素粒子論）

（主要著書）

" Electroweak Theory "

Prog. Theor. Phys. Suppl. No.73 1982

（共著，理論物理学刊行会）

" 量子力学 "（吉岡書店）2001

場の量子論—摂動計算の基礎—（改訂版）　2005©

1999 年 5 月 25 日　初　版第 1 刷発行

2005 年 2 月 10 日　改訂版第 1 刷発行

2009 年 8 月 10 日　改訂版第 3 刷発行

著　者　日　置　善　郎

発行者　吉　岡　　誠

606-8225 京都市左京区田中門前町 87

株式会社　吉　岡　書　店

電話 (075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本（株）太洋社

ISBN 978-4-8427-0326-8